PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

BRUNO ŠEGVIĆ

HAMILTONOVI GRAFOVI

DIPLOMSKI RAD

Split, rujan 2021.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

HAMILTONOVI GRAFOVI

DIPLOMSKI RAD

Student:
Bruno Šegvić

Mentorica:
doc.dr.sc. Tanja Vojković

Split, rujan 2021.

Uvod

Teorija grafova je grana matematike koja proučava grafove i njihova svojstva. Začetke vuče još od 18. stoljeća i poznatog Eulerovog problema köenigsberških mostova. Također veliki doprinos ovoj grani matematike je dao irski matematičar Sir William Rowan Hamilton. U ovom radu ćemo se najviše baviti problemom kojeg je zadao Hamilton, tj. problemom traženja Hamiltonovog ciklusa.

U prvom poglavlju su definirani osnovni pojmovi iz teorije grafova koji će nam biti potrebni za daljni rad i proučavanje samih Hamiltonovih ciklusa.

U drugom poglavlju prelazimo na problem. Definiramo Hamiltonov ciklus i obrađujemo nužne i dovoljne uvjete da bi graf bio Hamiltonov. Također definiramo još neke pojmove kao što su žilavost i zatvorenje grafa koji nam olakšavaju razmatranje Hamiltonovih grafova.

Dakle, osnovni cilj ovog rada je pojasniti i olakšati traženje, odnosno utvrđivanje sadrži li graf Hamiltonov ciklus.

Svako poglavlje je upotpunjeno konkretnim primjerima da bismo imali bolji uvid u ono čime se bavimo.

Sadržaj

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi teorije grafova

1.1 Osnovne definicije

Teorija grafova je mlada i moderna matematička disciplina koja ima sve raširenìju primjenu. Iako začetak teorija grafova datira još od davne 1736. godine i Eulerovog problema köenigsberških mostova tek se krajem 1970ih godina počela prihvaćati službena terminologija vezana za pojmove u teoriji grafova. U ovom poglavlju definirat ćemo osnovne pojmove koje ćemo koristiti u daljnjem radu.

Definicija 1.1 ***Graf*** *je uređeni par* $G = (V, E)$*, gdje je* V *neprazan skup čije elemente nazivamo* ***vrhovima*** *grafa, a* E *je multiskup kojem su elementi dvočlani multiskupovi skupa* V*, elemente skupa* E *nazivamo* ***bridovima*** *grafa.*

Uobičajeno ćemo označavati skup vrhova grafa G sa $V(G)$, a skup bridova sa $E(G)$. Također zbog jednostavnosti zapisa ćemo umjesto za brid $\{u, v\}$ pisati uv. Govorimo da brid uv spaja vrhove u i v, tj. da su vrhovi u i v **susjedni** i da je brid uv **incidentan** s vrhovima u i v te da su u i v **krajevi**

brida uv.

Petlja je brid koji spaja vrh sam sa sobom.

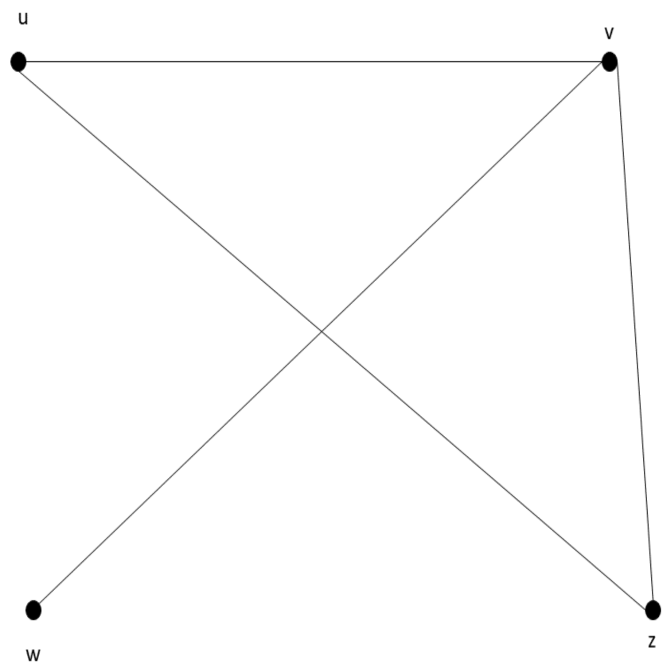
Kažemo da su dva ili više bridova **paralelni** ako spajaju iste vrhove.

Višestruki brid je skup međusobno paralelnih bridova.

Definicija 1.2 *Za graf $G = (V, E)$ kažemo da je* ***jednostavan*** *ako ne sadrži ni petlje ni višestruke bridove.*

Kako ćemo se mi u daljenjem radu baviti samo jednostavnim grafovima, pojam grafa će se odnositi isključivo na jednostavni graf.

Promotrimo sada jedan primjer grafa. Neka je $G = (V, E)$, $V = \{u, v, w, z\}$, $E = \{uv, vw, uz, vz\}$. Na Slici 1.1 je prikazan graf G.



Slika 1.1: Gore navedeni graf G

Definicija 1.3 ***Red*** *grafa* $G = (V, E)$ *je broj vrhova* $|V(G)|$.

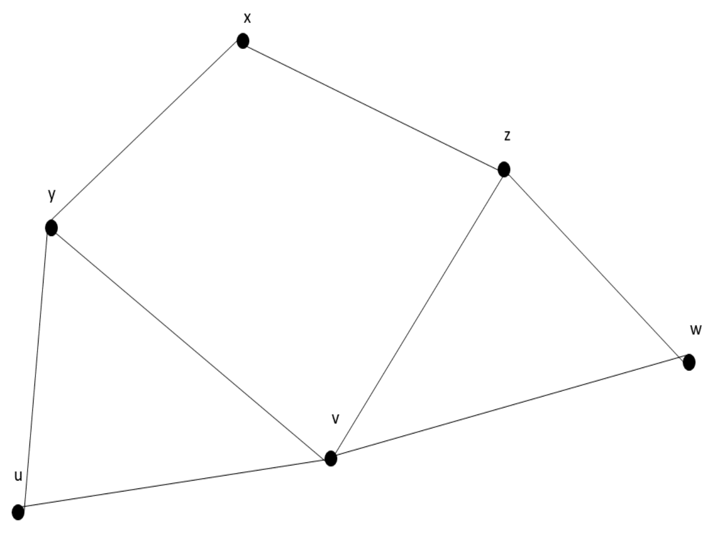
Definicija 1.4 ***Veličina*** *grafa* $G = (V, E)$ *je broj bridova* $|E(G)|$.

Sada uvodimo pojam koji se odnosi na broj bridova incidentnih pojedinom vrhu.

Definicija 1.5 ***Stupanj*** *vrha* v *u grafu* G *je broj bridova incidentnih s tim vrhom. Označavamo ga s* $deg_G(v)$ *ili jednostavnije* $deg(v)$ *ako se zna na koji se graf to odnosi.*

Definicija 1.6 *Za graf* G *kažemo da je* ***r-regularan****, ako su mu svi vrhovi stupnja* r. *Vrijednost* r *nazivamo stupanj regularnosti grafa.*

Najmanju vrijednost stupnjeva grafa G označavamo $\delta(G)$.
Uočimo da za r-regularan graf G vrijedi $\delta(G) = r$.



Slika 1.2: Primjer grafa koji nije r-regularan i vrijedi $\delta(G) = 2$

Kako su grafovi prije svega uređeni parovi skupova prirodno se postavlja pitanje, što dobijamo gledajući njihove podskupove. Stoga ćemo definirati pojmove koje dobijamo gledajući podskupove skupova vrhova i bridova.

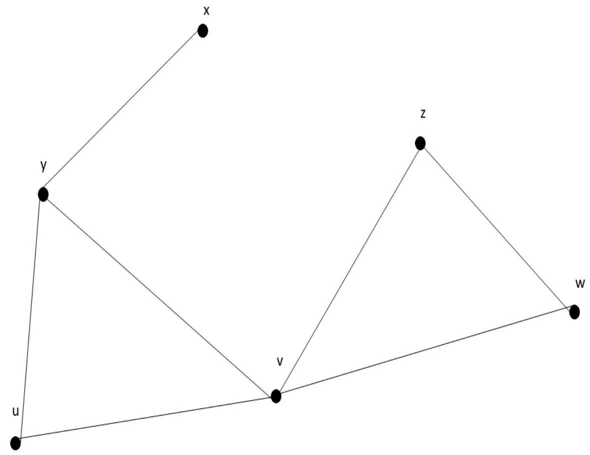
Definicija 1.7 *Neka je $G = (V, E)$ graf te neka je $V(H) \subseteq V(G)$. Ako je $E(H)$ skup kojem su elementi točno dvočlani podskupovi iz $V(H)$ takav da vrijedi $E(H) \subseteq E(G)$, onda kažemo da je graf $H = (V(H), E(H))$* ***podgraf*** *grafa G i pišemo $H \subseteq G$. G tada nazivamo* ***nadgraf*** *grafa H. Dodatno, ako je $H \subseteq G$ i $V(H) = V(G)$, kažemo da je H* ***razapinjujući*** *podgraf grafa G.*

Sada ćemo vidjeti kakvim sve operacijama možemo konstruirati podgrafove. Najjednostavniji primjer je uklanjanjem bridova. Ako je uv brid u grafu G, tada je graf $G-uv$ graf koji se dobije kada se grafu G ukloni brid uv. Očito je $G-uv$ razapinjujući podgrafa grafa G. Analogno vrijedi za podskup bridova $E' \subseteq E$, graf $G - E'$ je graf koji se dobije kada se grafu G uklone bridovi iz E'.

Na sličan način definiramo $G - u$, gdje je $u \in V(G)$, to je graf koji se dobije kada se grafu G izbaci vrh u i svi bridovi njemu incidentni. Analogno definiramo i $G - V'$, gdje je $V' \subseteq V(G)$, kao graf koji se dobije kada se grafu G izbace sve vrhovi iz V' i svi bridovi njima incidentni. Uvodimo još oznake $G + uv$, je oznaka za graf iz kojeg se uklanjanjem brida uv dobije točno graf G. Analogno se definira $G + F$, gdje je F neki skup bridova.

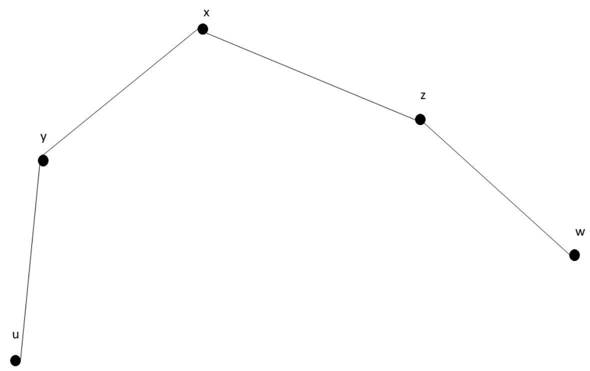
Pogledajmo sada na primjeru sa Slike 1.2 što dobijemo kada izbacimo brid xz.

Na Slici 1.3 vidimo kako izgleda $G - xz$.



Slika 1.3: $G - xz$

Na Slici 1.4 vidimo kako izgleda $G - v$.



Slika 1.4: $G - v$

Sada kada smo definirali pojam podgrafa i vidjeli osnovni način dobivanja podgrafa, uvodimo još dvije definicije vezane za dobivanje podgrafa.

Definicija 1.8 *Neka je $G = (V, E)$ graf i $S \subseteq V$.* ***Podgraf induciran skupom vrhova*** *S je graf kojem je skup vrhova točno skup S, a skup bridova su svi bridovi grafa G kojima su oba kraja sadržana u S. Označavamo ga $G[S]$.*

Definicija 1.9 *Neka je $G = (V, E)$ graf i $F \subseteq E$.* ***Podgraf induciran skupom bridova*** *F je graf kojem je skup vrhova podskup od V takav da je svaki vrh incidentan s barem jednim bridom iz F, dok mu je skup bridova točno skup F. Označavamo ga s $G[F]$.*

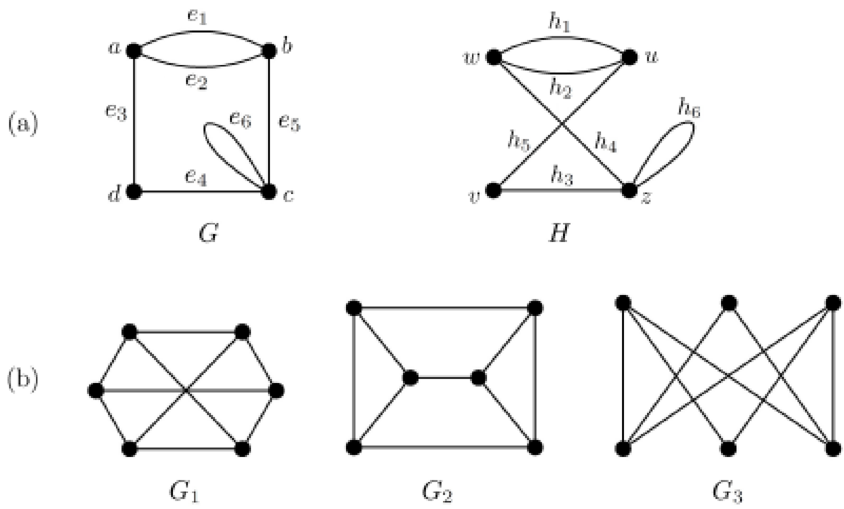
Za podgraf H grafa G kažemo da je **inducirani podgraf** ako vrijedi da su dva vrha susjedna u H ako i samo ako su susjedna u G.

Definicija 1.10 *Neka su $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$.* ***Spoj grafova*** *G_1 i G_2 je graf $G = (V, E)$ gdje je skup vrhova $V = V_1 \cup V_2$, a skup bridova $E = E_1 \cup E_2 \cup \{uv; u \in V_1, v \in V_2\}$. Označavamo $G = G_1 \vee G_2$.*

Sada kada smo definirali sve operacije na grafovima koje će nam biti potrebne za daljni rad uvodimo još jedan pojam koji se pojavljuje u gotovo svakoj matematičkoj teoriji, pojam "biti izomorfan".

Definicija 1.11 *Kažemo da su dva grafa $G = (V(G), E(G))$ i $H = (V(H), E(H))$* ***izomorfna*** *ako postoje bijekcije $f : V(G) \to V(H)$ i $g : E(G) \to E(H)$ takve da je vrh $v \in V(G)$ je incidentan bridu $vw \in E(G)$ ako i samo ako je $f(v)$ incidentan bridu $g(vw)$. Uređeni par (f, g) nazivamo* ***izomorfizam*** *grafova G i H. Pišemo $G \cong H$.*

Očito je relacija biti izomorfan relacija ekvivalencije. Na Slici 1.5 vidimo primjere izomorfnih i neizomorfnih grafova.



Slika 1.5: (a) su izomorfni grafovi, (b) neizomorfni

1.2 Povezanost

U ovom poglavlju ćemo se upoznati s pojmom povezanosti, laički rečeno pitamo se možemo li "prošetati" od jednog vrha do drugog.
Uvedimo nekoliko osnovnih pojmova da bolje razumijemo što bi to značilo "prošetati se".

Definicija 1.12 ***Šetnja*** *W u grafu G je konačni niz vrhova* v_i *i bridova* e_i $v_0 e_0 v_1 e_1 ..., e_k v_k$*, pri čemu mora vrijediti da su krajevi brida* e_i *vrhovi* v_{i-1} *i* v_i*. Kažemo da vrhovi* v_0 *i* v_k *povezani šetnjom.*

Definicija 1.13 ***Staza*** *u grafu je šetnja u kojoj su svi bridovi međusobni različiti.*

Definicija 1.14 ***Put*** *u grafu je staza u kojoj su svi vrhovi međusobno različiti.*

Definicija 1.15 ***Duljina puta*** *između vrhova u i v je broj bridova na tom putu.*

Definicija 1.16 *Kažemo da su dva vrha u i v* ***povezana*** *u grafu G, ako postoji put od u do v u grafu G.*

Očito je relacija "biti povezan" relacija ekvivalencije na skupu vrhova grafa.

Definicija 1.17 ***Udaljenost dvaju povezanih vrhova*** *u i v je duljina najkraćeg puta između tih dvaju vrhova. Označava se* $d(u, v)$*. Ako vrhovi u i v nisu povezani pišemo* $d(u, v) = \infty$.

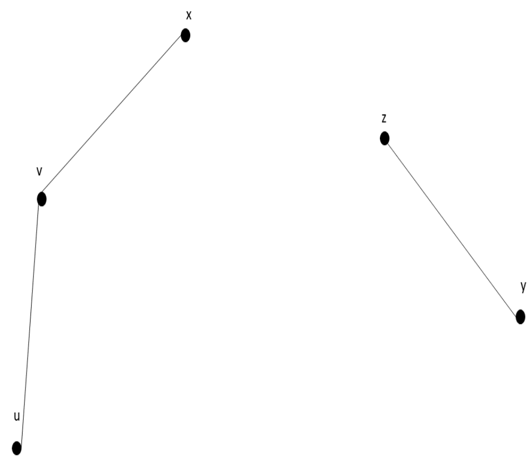
Sada možemo definirati povezan graf.

Definicija 1.18 *Za graf G kažemo da je* ***povezan*** *ako su mu svaka dva vrha povezana, u protivnom kažemo da je* ***nepovezan****.*

Promotrimo sada nepovezane grafove. Uočimo da u svakom nepovezanom grafu možemo uočiti podgrafove koji su povezani, takve podgrafove ćemo nazivati komponente povezanosti. Uvedimo i formalnu definiciju.

Definicija 1.19 *Povezani podgraf grafa G koji nije podgraf nijednog drugog povezanog podgrafa grafa G nazivamo* ***komponenta povezanosti****. Broj komponenti povezanosti grafa G ćemo označavati s $c(G)$.*

Očito je $c(G) = 1$, za svaki povezani graf G. Na Slici 1.6 vidimo nepovezan graf koji ima 2 komponente povezanosti.



Slika 1.6: Nepovezan graf s 2 komponente povezanosti

Primjetimo da uklanjanje samo jednog brida ili vrha grafa može rezultirati grafom s povećanim brojem komponentni. Definirajmo takve bridove, tj. vrhove.

Definicija 1.20 *Neka su u i uv vrh odnosno brid grafa G. Kažemo da je u* ***rezni vrh*** *grafa G ako vrijedi $c(G) > c(G - u)$. Analogno za uv kažemo da je* ***rezni brid*** *ako vrijedi $c(G) > c(G - uv)$.*

Prethodnu definiciju možemo malo poopćiti, tj. definirati za skup vrhova odnosno bridova.

Definicija 1.21 *Za skup $S \subseteq V$, gdje je V skup vrhova grafa G, kažemo da je* ***rezni skup vrhova*** *ako vrijedi $c(G) > c(G - S)$.*

Uvedimo još mjeru povezanosti.

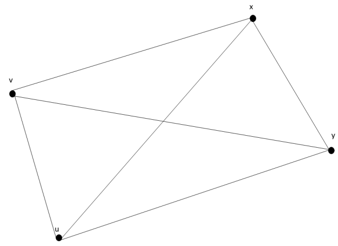
Definicija 1.22 *Za graf G kažemo da je k-**povezan** ako uklanjenjem manje od k vrhova dobiveni podgraf i dalje ostaje povezan. Ovaj pojam još nazivamo i* ***povezanost*** *grafa G i označavamo $\kappa(G) = k$.*

1.3 Neke poznate klase grafova

Postoji nekoliko tipova grafova koji imaju važnu ulogu u proučavanju grafova općenito i koje ćemo često promatrati u daljnjem radu.

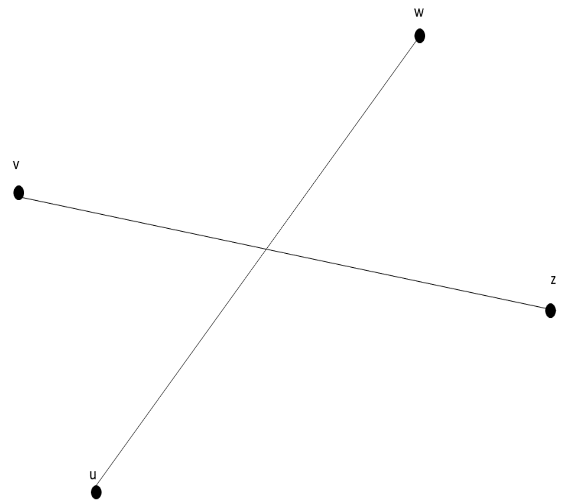
Potpuni graf je graf kojemu su svi vrhovi međusobno susjedni. Potpuni graf s n vrhova označavamo K_n.

Na Slici 1.7 vidimo graf K_4.



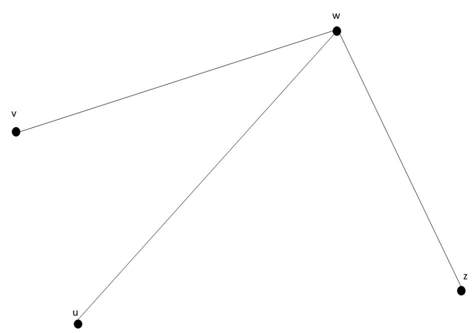
Slika 1.7: K_4

Bipartitni graf je graf $G = (V, E)$, čiji se skup vrhova V može particionirati u 2 disjunktna skupa A i B takva da svaki brid iz E ima jedan kraj u A, a drugi u B. Kažemo da G ima biparticiju [A,B] i označavamo ga $G[A, B]$. Na Slici 1.8 imamo bipartitni graf sa skupovima $A = \{u, v\}$, $B = \{w, z\}$.



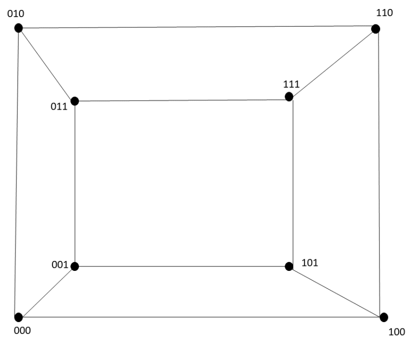
Slika 1.8: Bipartitni graf

Potpuni bipartitni graf $G[A, B]$ je bipartitni graf u kojem je svaki vrh iz skupa A susjedan svakom vrhu iz skupa B. Potpuni bipartitni graf za kojeg vrijedi $|A| = r$ i $|B| = s$ označavamo $K_{r,s}$.
Na Slici 1.9 vidimo $K_{1,3}$.



Slika 1.9: $K_{1,3}$

Bipartitni grafovi su u stvari samo poseban slučaj k-partitnih grafova. Za graf G kažemo da je **k-partitni graf** ako mu se skup vrhova može podijeliti u k disjunktnih podskupova tako da svaki brid ima krajeve u dva različita podskupa.
Za k-partitni graf G kažemo da je **potpuni k-partitni graf** ako vrijedi da su dva vrha susjedna ako i samo ako pripadaju različitim skupovima particije $V_1, V_2, ..., V_k$. Takav graf označavamo $K_{p1,p2,...,p_k}$ gdje je $p_i = |V_i|$, $i = 1, 2..., k$.
Poopćenje grafa određenog vrhovima i bridovima kocke nazivamo **k-kocka** ili **k-kubni graf**. Vrhovi k-kubnog grafa su uređene k-torke $(a_1, a_2, ..., a_k)$,$k \in \mathbb{N}$, $a_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2..., k$. Susjedni su oni vrhovi koji se razlikuju u točno jednoj komponenti k-torke. Obično k-kubni graf označavamo s Q_k. Q_k je k-regularan bipartitni graf reda 2^k.
Na slici 1.10 vidimo Q_3.



Slika 1.10: Q_3

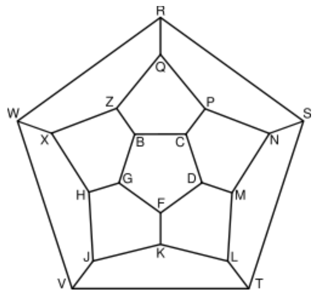
Od ovih "poznatih" grafova navest ćemo još i **Petersenov graf**. To je 3-regularan graf s 10 vrhova i 15 bridova. Na Slici 2.5 vidimo Petersenov graf.

Poglavlje 2

Hamiltonovi grafovi

2.1 Hamiltonova Ikozijska igra

William Rowan Hamilton (1805. - 1865.) je bio jako nadareno dijete pokazujući interese prema matematici i fizici te jezicima kojih je znao mnogo već do 10te godine. Godine 1832. je predvidio da se zraka svjetlosti koja prolazi kroz dvoosni kristal lomi u obliku stošca. Kada je ovo eksperimentalno potvrđeno, smatrano je velikim otkrićem te je nakon toga Hamilton proglašen vitezom, tj. postao je Sir William Rowan Hamilton. Čak se i danas Hamilton smatra jednim od najvećih matematičara i fizičara 19. stoljeća. Iako je Hamilton imao brojna postignuća jedno od njegovih najpoznatijih postignuća u matematici je njegovo stvaranje novog nekomutativnog algebarskog sustava zvanog kvaternioni, proširenja kompleksnih brojeva. Hamilton je 1856. razvio još jedan primjer nekomutativne algebarske strukture u igri koju je nazvao Ikozijska igra, koju je prvi put izložio na sastanku Britanskog udruženja u Dublinu. Ikozijska igra (prefiks ikos dolazi iz grčkog jezika za broj 20) se sastojala od daske na koju se postavilo 20 rupa i nekoliko crta između određenih parova rupa.



Slika 2.1: Ikozijska igra

Na slici 2.1 je prikazan dijagram ove igre, gdje je svaka rupa označena jednim suglasnikom iz engleske abecede. Hamilton je kasnije prodao prava ove igre za 25 funti John Jaques & Son , proizvođaču igara koji je bio posebno poznat kao trgovac šahovskim kompletima. Predgovor s uputama za igru je napisao Hamilton 1859. koji je glasio:

U ovoj novoj igri (izumio Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON, LL.D., i dr., iz Dublina, i po njemu je nazvana Ikozijska, 'icos' grčka riječ koja označava 'dvadeset') igrač treba postaviti cijeli ili dio skupa od dvadeset numeriranih figura u rupe označenim slovima, na takav način da uvijek nastavlja po linijama crta i također da ispuni neke druge uvjete, koje postavlja drugi igrač. Na taj se način može vježbati domišljatost i vještina u predlaganju, kao i u rješavanju problema igre. Na primjer, prvi od dva igrača može postaviti prvih 5 komada u bilo kojih 5 uzastopnih rupa i onda zahtijevati od drugog igrača da preostalih 15 komada postavi također uzastopno, a to može biti i ciklički, tj broj 20 može biti susjedan broju 1. Uvijek je moguće naći rješenje. Dakle, ako su B C D F G dane početne točke, dopušteno je dovršiti niz slijedeći abecedni redoslijed dvadeset suglasnika, što možemo vidjeti i na dijagramu igre; ali nakon postavljanja komada br. 6 u rupu H također je dopušteno (prema pretpostavljenim uvjetima) staviti broj 7 u X umjesto u J, a zatim zaključiti nizom W R S T V J K L M N P Q Z. Ostale primjere iko-

zijskih problema, s rješenjima nekih od njih, naći ćete na sljedećoj stranici. Druga (putnička) verzija Hamiltonove Ikozijske igre označena je kao:

NOVA ZAGONETKA

PUTNIKOV DODEKAEDAR

ili

PUTOVANJE OKO SVIJETA

U ovoj igri dvadeset vrhova dodekaedra označenih s dvadeset suglasnika, označavaju dvadeset gradova svijeta (engleski nazivi kao u originalu, jer kada bi prevodili neka početna slova bi se promijenila):

B. Brussels H. Hanover N. Naples T. Toholsk

C. Canton J. Jeddo P. Paris V. Vienna

D. Delhi K. Kashmere Q. Quebec W. Washington

F. Frankfort L. London R. Rome X. Xenia

G. Geneva M. Moscow S. Stockholm Z. Zanzibar

Ideja je bila konstruirati put oko svijeta gdje bi se svaki od 20 gradova posjetilo točno jednom. Uočimo, dijagram Ikozijske igre na Slici 2.1 možemo interpretirati kao graf, gdje su crte bridovi, a rupe su mu vrhovi.

2.2 Dovoljni uvjeti Hamiltonovog grafa

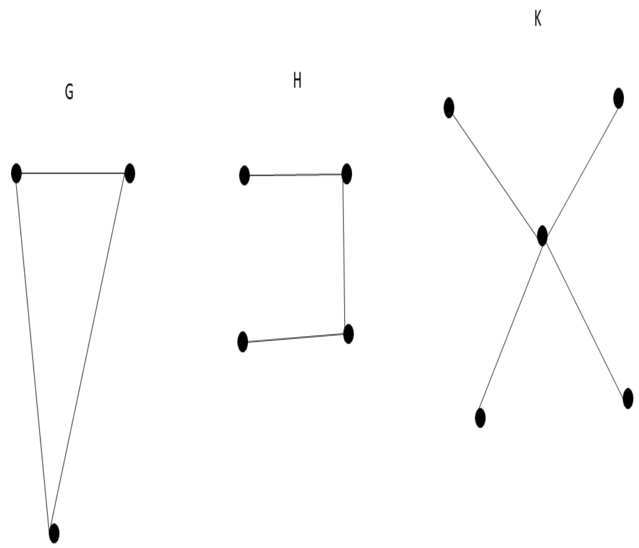
Problemi koje je Hamilton predložio u svojoj Ikozijskoj igri, postali su popularan predmet proučavanja u teoriji grafova. Uvodimo definicije Hamiltonovog puta, ciklusa i konačno, grafa.

Definicija 2.1 *Neka je $G = (V, E)$ graf. Put u grafu G koji sadrži svaki vrh se naziva **Hamiltonov put**.*

Definicija 2.2 *Neka je $G = (V, E)$ graf. Ciklus u grafu G koji sadrži svaki vrh se naziva **Hamiltonov ciklus**.*

Definicija 2.3 *Neka je $G = (V, E)$ graf, za graf G kažemo da je **Hamiltonov** ako sadrži Hamiltonov ciklus.*

Uočimo da za svaki Hamiltonov graf $G = (V, E)$ vrijedi $|V| \geq 3$, nadalje uočimo i da svaki Hamiltonov graf sadrži Hamiltonov put.



Slika 2.2: Jednostavni primjeri

Na Slici 2.2 vidimo najjednostavniji Hamiltonov graf, to je graf G, graf H nam je graf koji sadrži Hamiltonov put, ali ne i ciklus, a graf K je graf koji ne sadrži Hamiltonov put.

Sada kad smo upoznati s pojmovima Hamiltonovog puta, ciklusa i grafa te smo vidjeli na nekim najosnovnijim primjerima kako izgledaju ti grafovi, možemo krenuti s dovoljnim uvjetima za Hamiltonov graf, kako bismo lakše mogli prepoznati Hamiltonov graf. Prvi takav teorem je dokazao Oystein Ore (1899. -1968.) 1960. godine, pa je po njemu i nazvan Oreov teorem. U iskazu svog teorema Ore je koristio pojam minimalnog zbroja stupnjeva dvaju nesusjednih vrhova kojeg ćemo označavati s $\sigma_2(G)$.

Teorem 2.4 (Oreov teorem) *Neka je* $G = (V, E)$ *graf za kojeg vrijedi* $|V| = n \geq 3$. *Ako je* $\sigma_2(G) \geq n$, *onda je* G *Hamiltonov graf.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada za neki prirodni broj $n \geq 3$ postoji graf H s n vrhova za kojeg vrijedi $\sigma_2(H) \geq n$ i H nije Hamiltonov graf. Sada grafu H dodajmo maksimalan broj bridova između nesusjednih vrhova tako da on i dalje ne bude Hamiltonov graf i označimo takav graf sa G. Dakle sada je G maksimalan ne Hamiltonov graf, tj. ako dodamo brid između bilo koja dva nesusjedna vrha u i v on postaje Hamiltonov. Uočimo da G nije potpun graf te vrijedi $\sigma_2(G) \geq n$. Kako je G maksimalan ne Hamiltonov graf, onda je $G + uv$ Hamiltonov graf, gdje su u i v bilo koja dva nesusjedna vrha. Sada kako je $G + uv$ Hamiltonov graf to sadrži Hamiltonov ciklus C. Kako ciklus C mora sadržavati brid uv to znači da graf G sadrži Hamiltonov put od u do v ($u = v_1, v_2, ..., v_{n-1}, v_n = v$). Sada ako u grafu G postoji brid uv_i, gdje je $2 \leq i \leq n-1$, tada vv_{i-1} nije brid u grafu G, jer kada bi bio tada bi postojao ciklus $C' = (u = v_1, v_2, ..., v_{i-1}, v = v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, ..., v_i, u)$, što je Hamiltonov ciklus u grafu G, a graf G nije Hamiltonov po pretpostavci. Dakle, za svaki vrh grafa G koji je susjedan vrhu u postoji vrh iz skupa $V(G)$ v koji nije susjedan vrhu v, pa onda slijedi $deg_G v \leq (n-1) - deg_G u$, tj. $deg_G u + deg_G v \leq n - 1$, što je u kontradikciji s činjenicom da je $\sigma_2(G) \geq n$. Dakle, H je Hamiltonov. ■

Sada kao izravnu posljedicu Oreovog teorema imamo Diracov teorem.

Korolar 2.5 (Diracov teorem) *Neka je $G = (V, E)$ graf za kojeg vrijedi $|V| = n \geq 3$ i vrijedi $deg v \geq n/2$, za svaki vrh v iz skupa vrhova $V(G)$. Tada je G Hamiltonov.*

Dokaz. Uočimo da uvjet da svaki vrh ima stupanj barem $n/2$ osigurava uvjet $\sigma_2(G) \geq n$, pa su sada ispunjeni uvjeti Oreovog teorema pa slijedi tvrdnja. ■

Sada također uz pomoć Oreov teorema, možemo iskazati i dokazati dovoljan uvjet za postojanje Hamiltonovog puta u grafu.

Korolar 2.6 *Neka je $G = (V, E)$ graf za kojeg vrijedi $|V| = n \geq 2$. Ako je $\sigma_2(G) \geq n - 1$, onda G sadrži Hamiltonov put.*

Dokaz. Neka je $H = G \vee K_1$ spoj grafova G i K_1, gdje je w vrh od H koji ne pripada G. Tada vrijedi $\sigma_2(H) \geq n+1$. Sada kako je red od H jednak $n+1$, po Oreovom teoremu slijedi da je H Hamiltonov. Neka je C Hamiltonov ciklus u grafu H. Sada brišući w iz tog ciklusa dobijemo Hamiltonov put u grafu G. ■

J. Adrian Bondy i Vašek Chvátal su primjetili da dokaz Oreovog teorema ne koristi niti mu je potrebna puna snaga zahtjeva da je zbroj svakog para nesusjednih vrhova jednak najmanje broju svih vrhova. Tako su i Bondy i Chvátal došli do sljedećeg rezultata.

Teorem 2.7 *Neka su u i v dva nesusjedna vrha grafa G reda n takvi da vrijedi $deg u + deg v \geq n$. Tada je $G + uv$ Hamiltonov ako i samo ako je G Hamiltonov.*

Dokaz. Ako je G Hamiltonov, onda je i $G + uv$ Hamiltonov. Obratno, pretpostavimo da je $G+uv$ Hamiltonov, tada svaki Hamiltonov ciklus sadrži brid uv, a to znači da postoji Hamiltonov put od u do v. Sada na identičan način kao u dokazu Oreovog teorema dođemo do kontradikcije. ■

2.3 Zatvorenje grafa

Rezultat iz Teorema 2.7 nas motivira za uvođenje novog pojma **zatvorenja** grafa, koji je itekako koristan alat za ispitivanje je li graf Hamiltonov.

Definicija 2.8 *Neka je G graf reda n.* ***Zatvorenje grafa*** *G u oznaci $CL(G)$ je graf dobiven iz grafa G rekurzivnim spajanjem nesusjednih vrhova čiji je zbroj stupnjeva barem n, sve dok takvih parova više nema.*

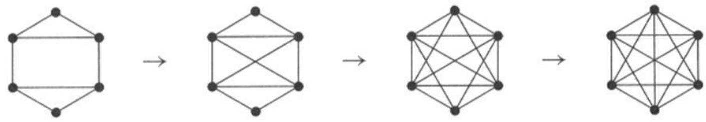
Prvo pokažimo da je operacija zatvorenja dobro definirana, tj. da ne ovisi o redosljedu spajanja vrhova.

Teorem 2.9 *Neka je graf G reda n. Ako su G_1 i G_2 grafovi dobiveni rekurzivnim spajanjem nesusjednih vrhova grafa G čiji je zbroj stupnjeva najmanje n, dok ne ostane takvih parova, onda je $G_1 = G_2$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je graf G_1 dobiven dodavanjem bridova $e_1, e_2, ..., e_r$ danim redoslijedom, a graf G_2 dobiven dodavanjem bridova $f_1, f_2, ..., f_s$ danim redoslijedom. Pretpostavimo suprotno, $G_1 \neq G_2$. Tada je $E(G_1) \neq E(G_2)$. Stoga možemo pretpostaviti da postoji brid $e_i = uv$ u nizu $e_1, e_2, ..., e_r$ koji ne pripada grafu G_2 i neka je brid e_i prvi takav u nizu. Ako je $i = 1$ onda neka je $H = G$; inače neka je $H = G+e_1, e_2, ..., e_{i-1}$. Sada je H podgraf od G_2 i u i v su nesusjedni vrhovi u grafu H. Kako je $deg_H u + deg_H v \geq n$, to slijedi $deg_{G_2} u + deg_{G_2} v \geq n$, što je u kontradikciji s načinom na koji je G_2 konstruiran. ■

Na Slici 2.3 vidimo postupak konstruiranja zatvorenja grafa. Sada navodimo karakterizaciju Hamiltonovog grafa pomoću zatvorenja grafa.

Teorem 2.10 *Graf je Hamiltonov ako i samo ako je zatvorenje tog grafa Hamiltonov graf.*



Slika 2.3: Konstruiranje zatvorenja grafa

Budući da je svaki potpuni graf s barem tri vrha Hamiltonov, zbog Bondyevih i Chvátalovih opažanja, dobivamo dovoljan uvjet za Hamiltonov graf pomoću zatvorenja grafa.

Teorem 2.11 *Neka je G graf s barem tri vrha. Ako je $CL(G)$ potpun graf, onda je G Hamiltonov.*

Ako graf zadovoljava uvjete iz Teorema 2.4 (Oreov), onda je očito zatvorenje grafa $CL(G)$ potpun graf, pa po Teoremu 2.11 slijedi G je Hamiltonov graf. Tako da je Oreov teorem izravna posljedica Teorema 2.11 (iako je kronološki prethodio Teoremu 2.11 nekoliko godina). Zapravo većina dovoljnih uvjeta koji proizlaze iz stupnjeva vrhova grafa mogu biti izvedeni iz Teorema 2.11.

Teorem 2.12 *Neka je G graf s n vrhova, $n \geq 3$, sa stupnjevima koji zadovoljavaju $d_1 \leq \ d_2 \leq ... \leq d_n$. Ako ne postoji cijeli broj $k < n/2$ za kojeg vrijedi $d_k \leq k$ i $d_{n-k} \leq n-k-1$, onda je G Hamiltonov.*

Dokaz. Neka je $H = CL(G)$. Ako pokažemo da je H potpun po Teoremu 2.11 će slijediti da je G Hamiltonov. Pa pretpostavimo suprotno tj. H nije potpun. Neka su u i w dva nesusjedna vrha grafa H za koje je zbroj $deg_H u + deg_H w$ najveći mogući. Kako su u i w nesusjedni vrhovi slijedi $deg_H u + deg_H w \leq n-1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti

$deg_H u \leq deg_H w$. Dakle, ako je $k = deg_H u$, imamo $k \leq (n-1)/2 < n/2$ i $deg_H w \leq n-1-k$. Neka W označava skup svih vrhova različitih od w koji nisu susjedni w u grafu H. Tada je $|W| = n-1-deg_H w \geq k$. Također, izborom vrhova u i w, za svaki $v \in W$, vrijedi $deg_G v \leq deg_H v \leq deg_H u = k$. Dakle, G ima najmanje k vrhova stupnja najviše k i $d_k \leq k$. Neka U označava skup svih vrhova različitih od u koji nisu susjedni u u grafu H. Sada je $|U| = n-1-deg_H u = n-k-1$. Također, za svaki vrh $v \in U$ vrijedi $deg_G v \leq deg_H v deg_H w \leq n-1-k$, pa slijedi $d_{n-k-1} \leq n-k-1$. Također imamo $deg_G u \leq deg_H u \leq deg_H w \leq n-k-1$, pa slijedi $d_{n-k} \leq n-k-1$. Sada je očito za ovaj k dobivena kontradikcija s pretpostavkom teorema. Dakle, slijedi da je H pa je dakle G Hamiltonov. ■

Primjetimo da svi dosad prikazani dovoljni uvjeti za Hamiltonov graf uključuju stupnjeve vrhova. Štoviše, za svaki graf s n vrhova, zahtjeva se da neki od vrhova bude barem stupnja $n/2$. U slučaju regularnih grafova, vidjet ćemo da se uvjeti mogu oslabiti. Bill Jackson je pokazao da je svaki 2-povezani r-regularni graf reda najviše $3r$ Hamiltonov. Sada ćemo pokazati da se $3r$ ne može zamijeniti sa $3r+1$. Takav primjer će biti Petersenov graf.

Teorem 2.13 *Petersenov graf nije Hamiltonov.*

Dokaz. Dokaz provodimo kontradikcijom. Pretpostavimo suprotno tj. neka je Petersenov graf P Hamiltonov. Tada P ima ciklus $C = (v_1, v_2, ..., v_{10}, v_1)$. Kako je P kubni graf, vrh v_1 je susjedan točno jednom od vrhova $v_3, v_4, ..., v_9$. Budući da P ne sadrži nijedan 3-ciklus ni 4-ciklus, v_1 je susjedan točno jednom od vrhova v_5, v_6, v_7. Zbog simetričnosti vrhova v_5 i v_7, možemo pretpostaviti da je v_1 susjedan ili v_5 ili v_6.

1. slučaj

v_1 je susjedan v_5 u grafu P. Tada je v_{10} susjedan točno jednom od vrhova v_4, v_5, v_6 , što daje 3-ciklus ili 4-ciklus, što nije moguće, jer Petersenov graf P ne sadrži nijedan 3-ciklus ni 4-ciklus.

2. slučaj

v_1 je susjedan v_6 u grafu P. Ponovno slijedi v_{10} je susjedan točno jednom od vrhova v_4, v_5, v_6. Kako P ne sadrži nijedan 3-ciklus ni 4-ciklus slijedi v_{10} je susjedan v_4. Sada primjetimo da smo u slučaju 1 gdje su vrhovi v_1 i v_5 zamijenjeni vrhovima v_{10} i v_4. ■

Sljedeći dovoljan uvjet da graf bude Hamiltonov ne koristi stupnjeve vrhova grafa, nego koristi kardinalnost skupova parova nesusjednih vrhova i njegovu povezanost.

Definicija 2.14 *Za skup vrhova U grafa G kažemo da je* ***nezavisan*** *ili* ***stabilan*** *ako nijedna dva vrha u skupu U nisu susjedna.*

Sada uvodimo oznaku $\alpha(G) = max\{|U|; U \text{ nezavisni skup u grafu } G\}$ i nazivamo ga broj nezavisnosti grafa G. Pogledajmo sada na nekim klasama grafova broj $\alpha(G)$.

$\alpha(K_{r,s}) = max\{r, s\}$, $\alpha(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ i $\alpha(K_n) = 1$.

Vašek Chvátal i Paul Erdös su pokazali da ako za graf G reda barem 3, čija je povezanost $\kappa(G)$ veća ili jednaka od broja nezavisnosti grafa $\alpha(G)$, da onda slijedi da je G Hamiltonov graf. U dokazu ovog teorema koristit ćemo dvije tvrdnje, koje navodimo bez dokaza.

Tvrdnja 1 *Ako je G k-povezan graf , $k \geq 2$, onda je svakih k vrhova od G sadržano u zajedničkom ciklusu.*

Tvrdnja 2 *Ako je G k-povezan graf, $k \geq 2$ i $u, v_1, v_2, ..., v_t$ su $t+1$ različitih vrhova, gdje je $2 \leq t \leq k$, onda G sadrži puteve od u do v_i za svaki i $(1 \leq i \leq t)$ od kojih svaka dva puta imaju samo zajednički vrh u.*

Teorem 2.15 *Neka je G graf reda barem 3. Ako vrijedi $\kappa(G) \geq \alpha(G)$, onda je G Hamiltonov.*

Dokaz. Ako je $\alpha(G) = 1$, onda je G potpun graf, pa je Hamiltonov. Stoga pretpostavimo $\alpha(G) = k \geq 2$. Sada kako je $\kappa(G) \geq 2$ slijedi da je G 2-povezan pa po Tvrdnji 1 slijedi da G sadrži ciklus. Neka je C najduži ciklus u grafu G. Sada također po Tvrdnji 1 slijedi da C ima barem k vrhova. Pokazat ćemo da je C Hamiltonov ciklus. Pretpostavimo suprotno tj. C nije Hamiltonov. Sada postoji neki vrh w u grafu G koji nije sadržan u C. Sada kako je G k-povezan po Tvrdnji 2 slijedi da G sadrži k puteva $P_1, P_2, ..., P_k$ takvih da je P_i put od w do v_i, gdje su v_i jedini zajednički vrhovi puteva P_i i ciklusa C redom i svi putevi P_i imaju točno jedan zajednički vrh w. U nekom cikličkom poretku vrhova u C neka je u_i vrh koji slijedi iza v_i u C za svaki i $(1 \leq i \leq k)$. Uočimo da nijedan vrh u_i nije susjedan vrhu w jer bi u protivnom zamjenom brida $v_i u_i$ sa P_i i wu_i dobili ciklus veće duljine od C, a C je odabran kao ciklus maksimalne duljine. Neka je $S = w, u_1, u_2, ..., u_k$. Kako je $|S| = k+1 > \alpha(G)$ i brid wu_i nije sadržan u G za svaki i $(1 \leq i \leq k)$, postoje dva različita broja r i s $1 \leq r, s \leq k$ takvi da je brid $u_r u_s$ sadržan u G. Sada zamjenom bridova $u_r v_r$ i $u_s v_s$ bridom $u_r u_s$ i putevima P_r i P_s dobijamo ciklus u graf G koji je veće duljine od ciklusa C, čime je dobivena kontradikcija, dakle C je Hamiltonov ciklus, tj. G je Hamiltonov graf. ■

Za ne Hamiltonov Petersonov graf P vrijedi $\kappa(P) = 3$ i $\alpha(P) = 4$, tj. $\kappa(P) < \alpha(P)$, jer očito bi onda po prethodnom teoremu slijedilo da je P Hamiltonov graf. Uočimo također $\kappa(P) \geq \alpha(P) - 1$, pa P ima Hamiltonov put.

2.4 Nužni uvjeti i žilavost grafa

Sada kada smo naveli neke dovoljne uvjete za Hamiltonov graf, prelazimo na nužne uvjete. Odmah uočimo da je svaki Hamiltonov graf povezan. Kako svaki par različitih vrhova u i v leži u Hamiltonovom ciklusu grafa G, to slijedi da G sadrži najmanje 2 disjunktna puta od u do v. Kako je svaki Hamiltonov graf 2-povezan, slijedi, ako je S podskup skupa vrhova od G takav da je $|S| = 1$, onda $G - S$ sadrži jednu komponentu. Sada imamo sljedeći teorem koji je nužni uvjet za Hamiltonov graf.

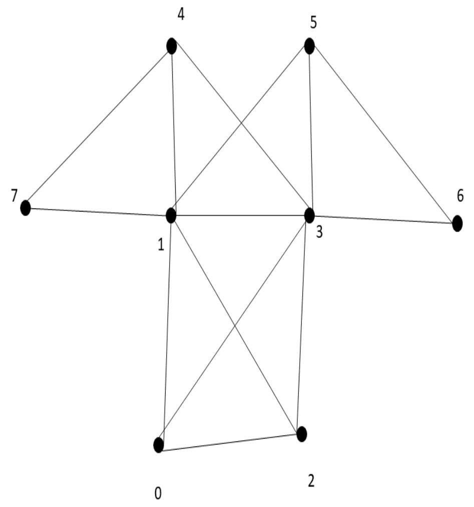
Teorem 2.16 *Ako je G Hamiltonov, onda vrijedi $c(G - S) \leq |S|$ za svaki neprazan podskup vrhova S skupa vrhova $V(G)$ grafa G.*

Dokaz. Neka je S neprazan podskup skupa $V(G)$. Ako je $G - S$ povezan, onda je očito $c(G - S) \leq |S|$. Stoga, pretpostavimo $c(G - S) = k \geq 2$ i neka su $G_1, G_2, ..., G_k$ komponente povezanosti grafa $G - S$. Neka je $C = (v_1, v_2, ..., v_n, v_1)$ Hamiltonov ciklus u grafu G. Bez smanjenja općenitonsti možemo pretpostaviti da je $v_1 \in V(G_1)$. Za svaki j $(1 \leq j \leq k)$, neka je v_{i_j} posljednji vrh od C koji pripada G_j. Nužno tada slijedi $v_{i_j+1} \in S$ za $1 \leq j \leq k$, pa slijedi $|S| \geq k = c(G - S)$. $\blacksquare$

Prethodni teorem ćemo češće koristi u obliku obrata po kontrapoziciji tj.
Ako postoji neprazan podskup S skupa vrhova $V(G)$ grafa G takav da vrijedi $c(G - S) > G$, onda G nije Hamiltonov.

Sada pogledajmo na idućem primjeru (Slika 2.4 kako ovim teoremom pokazujemo da graf nije Hamiltonov. Ako uzmemo skup $S = \{1, 3\}$, vidimo da je $c(G - S) = 3$, a $|S| = 2$.

Iz prethodnog teorema vidimo da za svaki Hamiltonov graf G vrijedi $c(G - S) \leq |S|$, za svaki rezni podskup vrhova S grafa G, dakle ako je G Hamiltonov graf vrijedi $\frac{|S|}{c(G-S)} \geq 1$. Uvedimo pojam žilavosti grafa tj. t-žilavosti



Slika 2.4: ne Hamiltonov graf

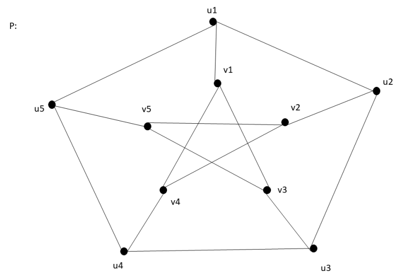
grafa.

Definicija 2.17 *Za nenegativni realni broj t i za nepotpuni graf G kažemo da je* t***-žilav*** *ako vrijedi $\frac{|S|}{c(G-S)} \geq t$ za svaki rezni podskup vrhova S.*

Odmah uočimo da ako je G t-žilav graf i s nenegativni realni broj takav da je $s < t$, odmah slijedi da je G i s-žilav. Kako smo prije pokazali slijedi da je svaki Hamiltonov graf 1-žilav, no sada ćemo pokazati da obrat ne vrijedi, tj. da postoje 1-žilavi grafovi koji nisu Hamiltonovi.

Teorem 2.18 *Petersenov graf je 1-žilav.*

Dokaz. Otprije znamo da je Petersenov graf P 3-povezan tj. da vrijedi $\kappa(P) = 3$. Pokažimo sada da vrijedi $|S|/c(P - S) \geq 1$, za svaki rezni podskup vrhova S. Pa pokažimo da za svaki skup S, takav da je $|S| \geq 3$, vrijedi $|S|/c(P - S) \geq 1$. Za $|S| \geq 5$ očito vrijedi. Dakle ostala su nam samo dva slučaja za pokazati za $|S| = 3$ i $|S| = 4$. Sa Slike 2.5 vidimo



Slika 2.5: Petersenov graf

da je $C = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_1)$ vanjski ciklus Petersenova grafa P te da je $C' = (v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_1)$ unutarnji ciklus. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da C sadrži barem jednako vrhova iz S kao i C'. Razlikujemo 3 slučaja.

1. slučaj

Nijedan vrh iz S nije sadržan u C'. Tada je $P - S$ povezan pa slijedi $|S|/c(P - S) > 1$.

2. slučaj

Jedan vrh iz S je sadržan u C'. Tada $P - S$ sadrži komponentu reda barem 5 pa slijedi $|S|/c(P - S) \geq 1$.

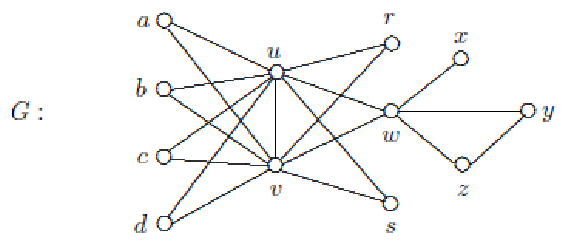
3. slučaj

Dva vrha su sadržana u C'. Tada je $|S| = 4$ i $P - S$ sadrži najviše 4 komponente pa slijedi $|S|/c(P - S) \geq 1$. ■

Definicija 2.19 *Najveći realni broj t za kojeg je nepotpuni graf G t-žilav nazivamo* ***žilavost*** *grafa G i označavamo $t(G)$.*

Odmah uočimo da je žilavost grafa racionalan broj. Također $t(G) = 0$ ako i samo ako je graf G nepovezan. Uočimo da za žilavost grafa vrijedi $t(G) = min\{\frac{|S|}{c(G-S)};\ S$ rezni skup vrhova grafa $G\}$.

Na Slici 2.6 vidimo primjer grafa i njegove žilavosti. Promotrimo skupove $S_1 = \{u, v, w\}$, $S_2 = \{w\}$ i $S_3 = \{u, v\}$. Uočimo $\frac{|S|}{c(G-S_1)} = \frac{3}{8}$, $\frac{|S|}{c(G-S_2)} = \frac{1}{3}$, $\frac{|S|}{c(G-S_3)} = \frac{2}{7}$, uočimo da ne postoji rezni vrh S grafa G takav da je $\frac{|S|}{c(G-S)} < \frac{2}{7}$.



Slika 2.6: Graf žilavosti $\frac{2}{7}$

Žilavost grafa G možemo promatrati kao mjeru koliko se čvrsto drže podgrafovi grafa G. Dakle, što je žilavost manja to je graf ranjiviji. Na primjer 1- žilav graf ima svojstvo da razbijanje grafa na k komponenti (ako je moguće) zahtjeva micanje barem k vrhova, dok 2-žilav graf za razbijanje na k komponenti zahtjeva micanje barem $2k$ vrhova. Parametar koji je važan za proučavanje žilavosti grafa G je broj nezavisnosti grafa $\alpha(G)$. Broj nezavisnosti predstavlja najveći broj $c(G - S)$, za sve rezne skupove S. Sada imamo $\kappa(G) \leq |S|$ i $c(G - S) \leq \alpha(G)$. Ovo nas dovodi do ograda za žilavost grafa.

Teorem 2.20 *Za svaki nepotpuni graf G vrijedi,* $\frac{\kappa(G)}{\alpha(G)} \leq t(G) \leq \frac{\kappa(G)}{2}$.

Dokaz. Znamo da vrijedi $t(G) = min\{\frac{|S|}{c(G-S)}\} \geq \frac{\kappa(G)}{\alpha(G)}$. Neka je S' rezni skup vrhova takav da je $|S'| = \kappa(G)$. Dakle $c(G - S') \geq 2$, pa slijedi $t(G) = min\{\frac{|S|}{c(G-S)}\} \leq \frac{|S'|}{c(G-S')} \leq \frac{\kappa(G)}{2}$. ■

Definicija 2.21 *Za dani graf F, kažemo da je graf G F-**slobodan**, ako G ne sadrži nijedan podgraf izomorfan grafu F.*

Uvodimo sada još neke posebne nazive za točno određene grafove.
Graf koji je K_3-slobodan nazivamo **graf bez trokuta**.
Graf koji je $K_{1,3}$-slobodan nazivamo **graf bez kandže**. Sada imamo sljedeći teorem, u dokazu kojeg ćemo koristiti jednu tvrdnju koju također navodimo bez dokaza.

Tvrdnja 3 *Ne trivijalni graf G je k-povezan za neki $k \geq 2$ ako i samo ako za svaki par različitih vrhova u i v postoji barem k međusobno disjunktnih puteva između u i v.*

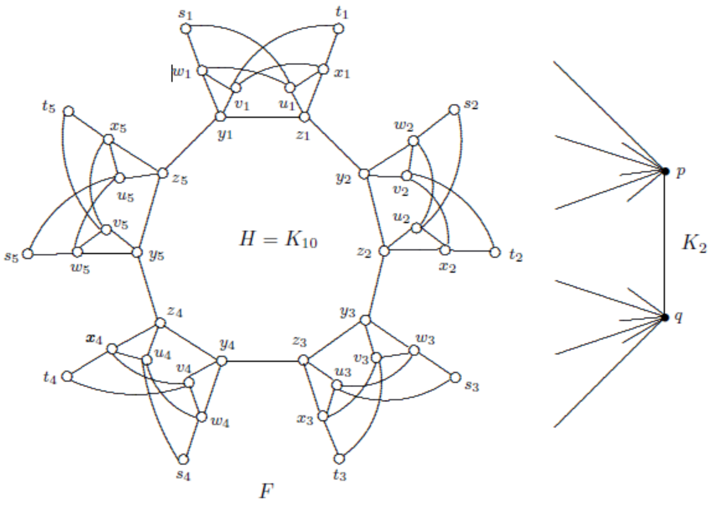
Teorem 2.22 *Ako je G nepotpuni graf bez kandže, onda je $t(G) = \frac{1}{2}\kappa(G)$.*

Dokaz. Ako G nije povezan, onda je $t(G) = \kappa(G) = 0$ pa tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo $\kappa(G) = r \geq 1$. Neka je S rezni skup takav da je $t(G) = |S|/c(G-S)$. Pretpostavimo da je $c(G-S) = k$ i da su $G_1, G_2, ..., G_k$ komponente grafa $G-S$. Neka su $u_i \in V(G_i)$ i $u_j \in V(g_j)$, $i \neq j$. Kako je G r-povezan to po Tvrdnji 3 slijedi da postoji barem r međusobno disjunktnih puteva između parova vrhova u_i i u_j. Svaki od ovih puteva sadrži vrh iz S. Sada slijedi da postoji barem r različitih bridova koji spajaju vrhove iz S i vrhove iz G_i za svaki i ($1 \leq i \leq k$). Dakle postoji skup X koji sadrži barem kr bridova između S i $G-S$ takvih da svaka dva brida spajaju neki vrh iz S i neki vrh iz komponente grafa $G-S$. Kako je G graf bez kandže, slijedi da nijedan vrh iz S nije spojen s vrhovima iz 3 različite komponente od $G-S$. Stoga imamo, $kr \leq |X| \leq 2|S| = 2kt(G)$; dakle $kr \leq 2kt(G)$, tj. $t(G) \geq r/2 = \kappa(G)$. Po Teoremu 2.20 imamo $t(G) \leq \kappa(G)/2$, dakle $t(G) = \kappa(G)/2$. ■

Chvátal je uveo pojam žilavosti, jer je bio uvjeren da je žilavost jako povezana s postojanjem Hamiltonovog ciklusa u grafu. Čak je dao iduću slutnju.

Slutnja 2.23 (t_0 Slutnja) *Postoji konstanta t_0 takva da je svaki t_0-žilav graf Hamiltonov graf.*

Drugim riječima Slutnja 2.23 nam govori o postojanju konstante t_0, takve da za svaki graf G za kojeg vrijedi $t(G) \geq t_0$, slijedi da je taj graf G Hamiltonov. Dugo se vjerovalo da je $t_0 = 2$, tj. da je svaki 2-žilav graf Hamiltonov. No 2000. godine Douglas Bauer, Hajo Broersma i Henk Jan Veldman su pronašli graf koji je 2-žilav, a nije Hamiltonov. Dakle, ako je Slutnja 2.23 istinita slijedi $t_0 > 2$. Štoviše Bauer, Broersma i Veldman su pokazali još i više. Pronašli su niz $\{G_k\}$ ne Hamiltonovih grafova za koje vrijedi $\lim_{k\to\infty} t(G_k) = 9/4$. Dakle, ako je slutnja istinita vrijedi $t_0 \geq 9/4$. Na Slici 2.7 vidimo taj čuveni graf.



Slika 2.7: Bauer-Broersma-Veldmanov graf

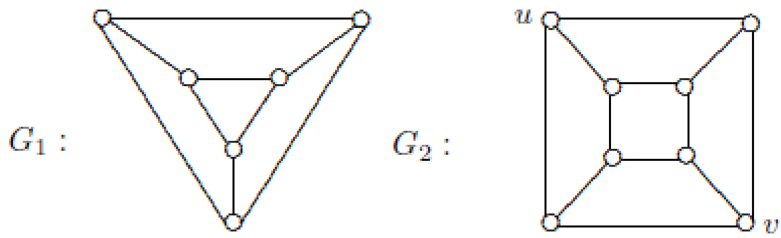
2.5 Hamilton-povezani i panpovezani grafovi

Kao što smo dosad vidjeli dobivanje primjenjive karakterizacije za Hamiltonove grafove i dalje je nerješiv problem. Stoga uvodimo neke pojmove koji će nam olakšati razmatranje Hamiltonovih grafova.

Definicija 2.24 *Za graf G kažemo da je* ***Hamilton-povezan*** *ako između svaka dva vrha u i v u grafu G postoji Hamiltonov put koji ih povezuje.*

Uočimo da je svaki Hamilton-povezan graf reda barem 3, no obrat očito ne vrijedi.

Na Slici 2.8 vidimo da ne postoji Hamiltonov put između vrhova u i v



Slika 2.8: Hamilton-povezan graf i Hamilton-nepovezan graf

u grafu G_2.

Sada ćemo navesti dovoljan uvjet za Hamilton-povezan graf.

Teorem 2.25 *Neka je graf G reda n. Ako je $\sigma_2(G) \geq n+1$, onda je G Hamilton-povezan.*

Dokaz. Neka su u i v dva vrha grafa G. Neka je H graf reda $n+1$ dobiven tako da se grafu G doda vrh w koji je spojen s vrhovima u i v. Sada ćemo konstruirati zatvorenje grafa H, $F = CL(H)$. Kako je $deg_H x + deg_H y \geq n+1$ za svaka dva nesusjedna vrha x i y grafa H koja pripadaju G, slijedi $F[V(G)] = K_n$. Nadalje, ako je $x \in V(G) \setminus \{u, v\}$ slijedi $deg_F x + deg_F w \geq (n-1) + 2 = n+1$, pa slijedi da je brid koji spaja x i w brid u F. Stoga je $F = CL(H) = K_{n+1}$ pa po Teoremu 2.10 slijedi da je H Hamiltonov. Sada kako je $deg_H w = 2$, svaki Hamiltonov ciklus u H mora sadržavati bridove uw i vw. Uklanjanjem w iz C dobivamo Hamiltonov put od u do v u G. ■

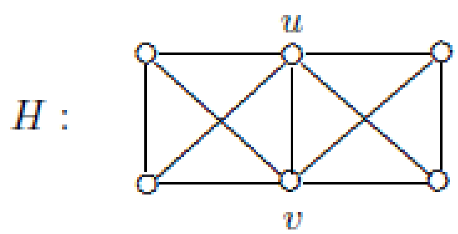
Sada kao neposrednu posljedicu imamo sljedeći korolar.

Korolar 2.26 *Neka je G graf reda n takav da je $deg_G v \geq (n+1)/2$, za svaki vrh v iz G. Tada je G Hamilton-povezan.*

Uočimo da je graf na Slici 2.1 Hamiltonov. U Ikozijskoj igri Hamilton je primjetio da svaki put duljine 5 leži na Hamiltonovom ciklusu (naravno nije koristio ovo terminologiju za to izraziti). Iako Hamilton to nije spomenuo to vrijedi i za sve puteve manje duljine, ali ne vrijedi za sve puteve duljine 6. Ovo nas dovodi do druge posebne klase Hamiltonovih grafova. Sada uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 2.27 ***Hamiltonov ekstenzijski broj*** *Hamiltonovog grafa G je najveći prirodni broj za kojeg svaki put te ili manje duljine leži na Hamiltonovom ciklusu grafa G. Označavamo ga sa* ***he(G)****.*

Na primjer za graf dodekaedra G vrijedi $he(G) = 5$.
Uočimo da očito za svaki Hamiltonov graf G vrijedi $he(G) \geq 1$, jer svaki vrh tog grafa leži na Hamiltonovom ciklusu. Idućim primjerom ćemo pokazati da postoji graf H za kojeg točno vrijedi $he(H) = 1$.



Slika 2.9: Graf H za kojeg vrijedi $he(H) = 1$

Uočimo da ne postoji Hamiltonov ciklus u grafu H sa Slike 2.9 koji sadrži brid od u do v. Sada imamo sljedeći rezultat koji nam daje donju granicu za Hamiltonov ekstenzijski broj grafa G pomoću broja $\delta(G)$ i još nekih uvjeta vezanih za vrijednost $\delta(G)$.

Korolar 2.28 *Neka su n i k cijeli brojevi takvi da vrijedi $n \geq 3$ i $1 \leq k < n$. Ako je G graf reda n takav da vrijedi $\delta(G) \geq (n+1-k)/2$, onda je $he(G) \geq k$.*

Dokaz. Za $k = 1$, tvrdnja je očita, a za $k = 2$ tvrdnja odmah slijedi po Korolaru 2.26. Dakle, možemo pretpostaviti da je $k \geq 3$ i $n \geq 4$. Neka je P put duljine l u grafu G, gdje je $3 \leq l \leq k$, označimo $P = (u = u_1, u_2, ..., u_l = v)$. Neka je $S = \{u_2, u_3, ..., u_{l-1}\}$ i neka je $H = G - S$. Tada je H reda $n' = n - l + 2$ i vrijedi
$\delta(H) \geq \delta(G) - l + 2 \geq \frac{n+l-1}{2} - l + 2 = \frac{n-l+3}{2} = \frac{n'+1}{2}$. Po Korolaru 2.26, graf H je Hamilton-povezan pa slijedi da H sadrži Hamiltonov put P' od u do v . Stoga, P' i P tvore Hamiltonov ciklus u grafu G koji sadrži put P. Dakle, $he(G) \geq k$. ■
Sada imamo sljedeći teorem.

Teorem 2.29 *Ako je G graf reda $n \geq 3$ takav da vrijedi $\delta(G) \geq n/2$, onda je $he(G) \geq 2\delta(G) - n + 1$.*

Dokaz. Ako je $\delta(G) = n/2$, onda $2\delta(G) - n + 1 = 1$, pa tvrdnja slijedi trivijalno. Stoga, možemo pretpostaviti $\delta(G) > n/2$.
Dakle, $\delta(G) \geq (n + 1)/2$. Sada po Korolaru 2.26 slijedi da je G Hamilton-povezan. Što povlači da je svaki brid grafa G sadržan u Hamiltonovom ciklusu grafa G. Nadalje, budući da je $\delta(G) \leq n - 1$, slijedi $2\delta(G) - n + 1 \leq n - 1$. Kako je G Hamiltonov, G sadrži puteve duljine $2\delta(G) - n + 1$ ili manje. Kako tvrdnja odmah slijedi, ako vrijedi $\delta(G) = n - 1$, možemo pretpostaviti da vrijedi $n/2 < \delta(G) \leq n - 2$. Slijedi $n \geq 5$, (za $n = 3$ i $n = 4$ tvrdnja je trivijalna) i $2\delta(G) - n + 1 \geq 2$. Neka je P put duljine l, gdje je $3 \leq l \leq 2\delta(G) - n + 1$ i neka je H podgraf grafa G induciran vrhovima $(V(G) - V(P)) \cup \{u, v\}$. Red grafa H jednak je $n' = n - l + 2 \geq$

$n - (2\delta(G) - n + 1) + 2 = 2(n - \delta(G)) + 1 \geq 5$. Štoviše, slijedi $\delta(H) \geq \delta(G) - l + 2 \geq \delta(G) - 2(\delta(G) - n + 1) + 2 = n - \delta(G) + 1 = (n' + 1)/2$. Sada po Korolaru2.26 slijedi da je H Hamilton-povezan. Dakle, H sadrži Hamiltonov put P' od u do v, koji zajedno sa P čini Hamiltonov ciklus u G koji sadrži P. ■

Kao što smo prethodno vidjeli, posljedica Diracovog teorema je da svaki graf reda $n \geq 3$, s uvjetom $\delta(G) \geq n/2$, povlači da svaki vrh (put duljine 1) leži na Hamiltonovom ciklusu. Zamijenimo li $1/2$ s nekim većim racionalnim brojem možemo dobiti još jači rezultat.

Korolar 2.30 *Neka je G graf reda $n \geq 3$ takav da je $\delta(G) \geq rn$ za neki racionalan broj $r \in [1/2, 1\rangle$. Tada je $he(G) \geq (2r-1)n + 1$.*

Dokaz. Po Teoremu 2.29, imamo $he(G) \geq 2\delta(G) - n + 1 \geq 2rn - n + 1 = (2r-1)n + 1$. ■

Sada malo promotrimo ovu granicu. Pokazat ćemo da je ona najbolja moguća tj. da uvijek postoji graf takav da vrijedi $he(G) = (2r-1)n + 1$. Znamo da za $r = 1/2$ to vrijedi. Pa pretpostavimo $1/2 < r < 1$. Tada je $r = a/b$ za neke pozitivne cijele brojeve a i b, gdje je $1/2 < a/b < 1$ i $a < b < 2a$. Neka je $G = K_{a,a,\ldots,a(b-a)}$ potpuni $(a+1)$-partitni graf s partitnim skupovima V_i $(1 \leq i \leq a+1)$ gdje je $|V_i| = a$ za $1 \leq i \leq a$ i $|V_{a+1}| = a(b-a)$. Graf G je očito reda $n = ab$ i $\delta(G) = a^2 = (a/b)ab = rn$. Po Korolaru 2.30 svaki put duljine $(2r-1)n + 1 = 2a^2 - ab + 1$ leži na Hamiltonovom ciklusu grafa G. Neka je P put duljine $a(2a-b) + 2 = (2r-1)n + 2$ takav da je $V(P) \subseteq \cup_{i=1}^{a} V_i$. Kako je $|\cup_{i=1}^{a} V_i| - |V(P)| = a^2 - [a(2a-b) + 2] = a(b-a) - 2$ i $|V_{a+1}| = a(b-a)$, slijedi da ne postoji Hamiltonov put na preostalim vrhovima od G pa dakle ne postoji Hamiltonov put koji sadrži P. Dakle, $h(G) = (2r-1)n + 1$.

Sada ćemo uvesti svojstvo grafova koje je čak snažnije od Hamilton-povezanosti.

Definicija 2.31 *Za povezan graf G reda n kažemo da je* ***panpovezan*** *ako* *za svaki par različitih vrhova u i v postoji put duljine l, za svaki l za kojeg vrijedi $d(u,v) \leq l \leq n-1$.*

Odmah uočimo da je svaki panpovezan graf ujedno i Hamilton-povezan, no da obrat ne vrijedi općenito. Za $k \geq 3$, neka je G_k graf takav da je $V(G_k) = \{v_1, v_2, ..., v_{2k}\}$ i $E(G_k) = \{v_i v_{i+1} : i = 1, 2.., 2k\} \cup \{v_i v_{i+3} : i = 2, 4, ..., 2k - 4\} \cup \{v_1 v_3, v_{2k-2} v_{2k}\}$, gdje su svi indeksi modulo $2k$. Iako za svaki par u, v različitih vrhova i za svaki cijeli broj l koji zadovoljava $k \leq l \leq 2k-1$, graf G_k sadrži put od u do v duljine l, ne postoji put duljine l između vrhova v_1 i v_{2k}, za $1 < l < k$, a vrijedi $d(v_1, v_{2k}) = 1$. Dakle G_k nije panpovezan, a očito je G_k Hamilton-povezan.
Sada imamo dovoljan uvjet za panpovezanost grafa na temelju minimalnog stupnja.

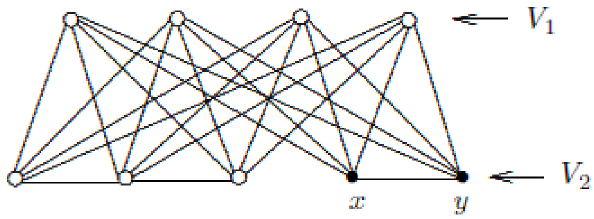
Teorem 2.32 *Ako je G graf reda $n \geq 4$ takav da vrijedi*

$$degv \geq (n+2)/2$$

za svaki vrh v grafa G, onda je G panpovezan.

Dokaz. Ako je $n = 4$, onda je $G = K_4$ pa tvrdnja vrijedi. Pa pretpostavimo suprotno tj. da postoji graf G reda $n \geq 5$ takav da je $\delta(G) \geq (n+2)/2$ i da G nije panpovezan. To znači da postoje vrhovi u i v grafa G i cijeli broj l takav da je $d(u,v) < l < n-1$ i da ne postoji put duljine l između u i v. Neka je $G^* = G - \{u, v\}$. Tada je G^* reda $n^* = n - 2 \geq 3$ i $\delta(G^*) \geq (n+2)/2 - 2 = n^*/2$. Po Diracovom teoremu odmah slijedi G^* je Hamiltonov. Pa postoji Hamiltonov ciklus $C = (v_1, v_2, ..., v_{n^*}, v_1)$. Ako je uv_i brid u G onda vv_{i+l-2} nije brid u G, za $1 \leq i \leq n^*$, gdje su indeksi izraženi modulo n^* jer bi u protivnom imali put duljine l $(u, v_i, v_{i+1}, ..., v_{i+l-2}, v)$ od u do v . Dakle, za svaki vrh u C koji je susjedan vrhu u u G, postoji vrh u C koji nije susjedan vrhu v u G. Kako je $deg_G u \geq (n+2)/2$, zaključujemo da je u susjedan barem $n/2$ vrhova u ciklusu C, pa slijedi $deg_G v \leq 1+n^* - n/2 = n/2-1$, čime je dobivena kontradikcija s činjenicom da za svaki vrh u G vrijedi da je stupnja barem $(n+2)/2$. ■

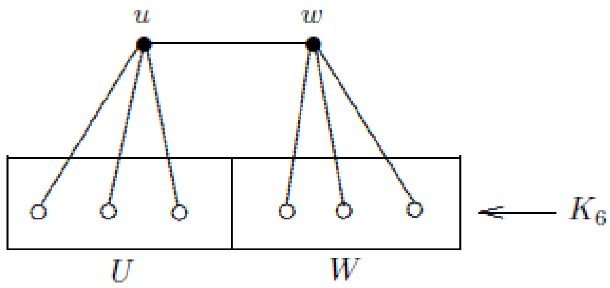
Rezultat iz Teorema 2.32, ne možemo općenito poboljšati i to ćemo pokazati idućim primjerom.



Slika 2.10: Graf koji nije panpovezan

Vidimo da graf G sa Slike 2.10 ima 9 vrhova i svaki je vrh stupnja 5, tj. vrijedi $\delta(G) \geq (9+1)/2$, ali ne vrijedi $\delta(G) \geq (9+2)/2$. Graf nije panpovezan jer ne postoji put duljine 3 između vrhova x i y.

Sada ćemo još pokazati da ne postoji konstanta c, takva da ako vrijedi $\sigma_2(G) \geq n+c$, za neki graf G reda n , da to onda povlači da je G panpovezan. Neka je $c \geq 2$ i neka je G graf reda $n = 2c+4$, gdje je $V(G) = \{u, w\} \cup U \cup W$, sa $|U| = |W| = c+1$ takvi da je $G[U \cup w] = K_{2c+2}$ i u je susjedan svakom vrhu iz U, a w je susjedan svakom vrhu iz W i uw je brid u G. Tada je $\sigma_2(G) = 3c+4 = n+c$. Kako je $d(u, w) = 1$, ne postoji put duljine 2 između u i w. Slijedi da G nije panpovezan.



Slika 2.11: Prethodno opisan graf za $c = 2$

Na Slici 2.11 vidimo primjer grafa koji nije panpovezan, a vrijedi $\sigma_2(G) \geq n + 2$. Prethodno smo vidjeli da ako za graf G vrijedi da je $\sigma_2(G) \geq f(n)$, da to povlači da G ima neko određeno svojstvo, ako se prisjetimo Oreovog teorema, svojstvo $\sigma_2(G) \geq n$ je povlačilo da je G Hamiltonov. Maloprije smo pokazali da to ne vrijedi za panpovezanost. No sada uvodimo novi pojam.

Definicija 2.33 *Za graf G reda $n \geq 3$ kažemo da je* ***pancikličan****, ako G sadrži ciklus duljine l za svaki l $(3 \leq l \leq n)$.*

Sada navodimo sljedeći teorem bez dokaza.

Teorem 2.34 *Ako je G graf reda $n \geq 3$, takav da vrijedi $\sigma_2(G) \geq n$, onda je G pancikličan ili je n paran i vrijedi $G = K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$.*

Literatura

[1] Anka Golemac, Teorija grafova, nastavni tekst, Split, 2021.

[2] Chartrand Gary, Linda Lesniak, and Ping Zhang. Graphs digraphs. Vol. 22. London: Chapman Hall, 1996.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

HAMILTONOVI GRAFOVI

BRUNO ŠEGVIĆ

Sažetak:

U ovom diplomskom radu smo proučavali pojam Hamiltonovog ciklusa. Definirali smo osnovne pojmove korištene u teoriji grafova te pojmove zatvorenja i žilavosti grafa. Obradili smo nužne i dovoljne uvjete koji nam olakšavaju pronalazak Hamiltonovog ciklusa u grafu. Sve definirane pojmove smo potkrijepili primjerima kako bi si vizualizirali sami pojam.

Ključne riječi:

grafovi, Hamiltonovi grafovi, zatvorenje grafa, žilavost grafa

Podatci o radu:

40 stranica, 21 slika, 2 literaturna navoda, hrvatski i engleski jezik

Mentor(ica): *doc.dr.sc. Tanja Vojković*

Članovi povjerenstva:

prof.dr.sc. Anka Golemac

doc.dr.sc. Snježana Braić

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *27/09/2021*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

HAMILTONIAN GRAPHS

BRUNO ŠEGVIĆ

Abstract:

In this master's thesis we have been studying Hamiltonian cycles in graphs. We defined basic terms used in graph theory and terms of closure and toughness of graph. We processed sufficient and neccessary conditions for Hamiltonicity. We have supported all the defined concepts with examples in order to better visualize the concept itself.

Key words:

graphs, Hamiltonian graphs, closure of graph, toughness of graph

Specifications:

40 pages, 21 pictures, 2 references, Croatian and English language

Mentor: *assisstant professor Tanja Vojković*

Committee:

professor Anka Golemac

assisstant professor Snježana Braić

This thesis was approved by a Thesis commettee on *27/09/2021*