Metoda pražnjenja

Čondić, Ante

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ANTE ČONDIĆ

METODA PRAŽNJENJA

DIPLOMSKI RAD

Split, veljača 2023.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

METODA PRAŽNJENJA

DIPLOMSKI RAD

Student:
Ante Čondić

Mentorica:
doc. dr. sc. Tanja Vojković

Split, veljača 2023.

Uvod

Važan događaj u razvoju teorije grafova, ali i u povijesti matematike, predstavljao je dokaz dugovječne i slavne hipoteze četiriju boja objavljen 1977. godine. Godinama je taj problem bio izazov i poticaj u potrazi za učinkovitim istraživačkim metodama u diskretnoj matematici. Tako su i računala postupno postala dostupan i legitiman alat u matematičkim dokazima, unatoč sumnjičavosti nekih vodećih matematičara toga vremena. U ovom radu baviti ćemo se metodom pomoću koje je dokazana slavna hipoteza. U prvom dijelu ćemo dati općenitu ideju metode. U drugom i trećem dijelu ćemo kroz nekoliko primjera pokazati primjenu metode u planarnim grafovima i bojenjima.

Sadržaj

Poglavlje 1

Povijesni razvoj metode pražnjenja

Metoda pražnjenja razvila se kroz traženje dokaza za problem četiri boje (4CP). Teorija bojenja ravninskih grafova ima dugu povijest, koja se proteže sve do sredine 19. stoljeća, inspirirana poznatim problemom četiri boje kojeg su 1976. riješili Appel i Haken.

Nakon sto godina neuspjelih pokušaja rješavanja problema 4 boje, Appel i Haken su zajedno s Kochom, pronašli "nužan skup reducibilnih konfiguracija", korištenjem metode pražnjenja. Pravila pražnjenja i argumenti reducibilnosti bili su komplicirani. Početni dokaz uključivao je 1936 reducibilnih konfiguracija. Nužan skup generiran je ručno, ali je reducibilnost provjerena računalom.

Neki su se protivili korištenju računala, ali dokaz je sada općeprihvaćen. Robertson, Sanders, Seymour i Thomas tražili su jednostavniji dokaz, ali na kraju su koristili isti pristup. Iako je njihov nužan skup imao samo 633 konfiguracije i 32 pravila pražnjenja, ipak im je trebalo računalo.

S povećanjem računalne snage i jednostavnijim argumentima, njihov dokaz trajao je samo 20 minuta umjesto izvornih 1200 sati. 1960-ih se pojavljuju zanimljivi problemi bojenja grafova u ravnini i to je unaprijedilo proučavanje strukture ravninskih grafova općenito. U rješavanju 4CP, neke od prekretnica bile su Wernickeov teorem iz 1904., o postojanju vrha stupnja 5 koji je susjedan vrhu stupnja najviše 6 u ravninskom grafu s minimalnim stupnjem 5 i sličan rezultat (Franklin), koji osigurava postojanje vrha stupnja 5 s dva susjeda najvišeg stupnja 6. Napominjemo da su ovi teoremi formulirani u terminima nezaobilaznih skupova konfiguracija.

Godine 1940., Lebesgue je predložio da se naboji vrhova i/ili stranica ravnomjerno raspodijele između susjednih vrhova i/ili bridova i/ili stranica (u bilo kojoj kombinaciji). Konkretno, Lebesgue je opisao strukturu susjedstva vrhova stupnja 5 u ravninskim triangulacijama s minimalnim stupnjem 5.

Godine 1969. Heesch je uveo koncept vjerojatno reducibilnih konfiguracija, koje sve leže na udaljenosti najviše 2 od vrha stupnja 5. Vjerovao je da se zapravo može dokazati da su sve te konfiguracije reducibilne u odnosu na 4-bojenje pomoću specifične tehnike. Izračunao je njihovu kardinalnost koja iznosi 8900. Ovaj način rješavanja 4CP postao je opći okvir za Appelov i Hakenov slavni dokaz dobiven kao rezultat ručnog i računalnog rada.

Poglavlje 2

Osnovni pojmovi teorije grafova

Definicija 2.1 ***Graf*** *G uređena je trojka* (V, E, φ)*,* $G = (V, E, \varphi)$*, gdje je V neprazan skup čije elemente nazivamo* ***vrhovima*** *(engl. vertex), E je skup disjunktan s V čije elemente nazivamo* ***bridovima*** *(engl. edge) i* φ *preslikavanje koje svakom bridu pridružuje neuređeni par (ne nužno različitih) vrhova. Preslikavanje* φ *naziva se* ***incidencijska funkcija grafa G****.*

Broj vrhova $|V_G|$ nazivamo red, a broj bridova $|E_G|$ veličina grafa G. Obično ćemo za red grafa koristiti oznaku n, a za veličinu grafa m.

Definicija 2.2 *Kada je* $\varphi(e) = \{u, v\}$ *kažemo da su vrhovi u i v* ***krajevi*** *brida e i međusobno* ***susjedni****. Kažemo također da su vrhovi u i v* ***incidentni*** *s bridom e i obrnuto te da su vrhovi u i v spojeni bridom e.* ***Bridovi*** *su* ***susjedni*** *ako su incidentni istom vrhu. Brid e kojemu su krajevi isti vrh naziva se* ***petlja****. Ako e nije petlja, kažemo da je* ***pravi brid****. Dva ili više različitih bridova međusobno su* ***paralelni*** *ako imaju iste krajeve.* ***Višestruki brid*** *skup je međusobno paralelnih bridova.* ***Jednostavni graf*** *je graf bez petlji i višestrukih bridova. Za graf sa samo jednim vrhom i bez bridova kažemo da je* ***trivijalan****.*

Skup svih vrhova grafa G susjednih vrhu v označavat ćemo s $N_G(v)$.

Definicija 2.3 ***Stupanj*** *(ili* ***valencija)*** ***vrha*** *v u grafu G broj je bridova grafa G koji su incidentni s v, pri čemu se za svaku petlju broje dvije incidencije. Stupanj vrha v označava se s $deg(v)$ (engl. degree). Za vrh v grafa G kažemo da je* ***izolirani*** *vrh ako je $deg(v) = 0$. Za graf G kažemo da je* ***regularan*** *ako su mu svi vrhovi istog stupnja, ili preciznije da je r-**regularan** ako za sve v iz V_G vrijedi $deg(v) = r$. Broj r nazivamo* ***stupanj regularnosti*** *grafa G.*

Vrh sa stupnjem jednakim j nazivamo j-vrh, j^- je vrh stupnja j ili manje te j^+ vrh stupnja j ili više. J-susjed od vrha v je j-vrh koji je susjed od v.

Teorem 2.4 *(Lema o rukovanju) U svakom je grafu zbroj stupnjeva njegovih vrhova paran. Ako je m broj bridova grafa, onda je*

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2m \tag{2.1}$$

Dokaz. *Prebrojimo na dva načina incidencije u grafu (par vrh i brid koji su incidentni) računajući dvostruko incidencije petlji. Kada brojimo po vrhovima, ukupan broj incidencija jednak je zbroju stupnjeva svih vrhova. Brojimo li po bridovima, svaki brid ima dvije incidencije pa ih je ukupan broj jednak $2m$. Izjednačavanje dviju dobivenih vrijednosti daje 2.1.* ■

Kada je potrebno istaknuti da se stupanj vrha odnosi baš na vrh u grafu G koristi se oznaka $deg_G(v)$. Standardno se najmanja vrijednost među stupnjevima vrhova grafa G označava s $\delta(G)$ i naziva **minimalni stupanj grafa**, a najveća među tim vrijednostima označava se s $\Delta(G)$ i naziva **maksimalni stupanj grafa**. Za jednostavni graf vrijedi:

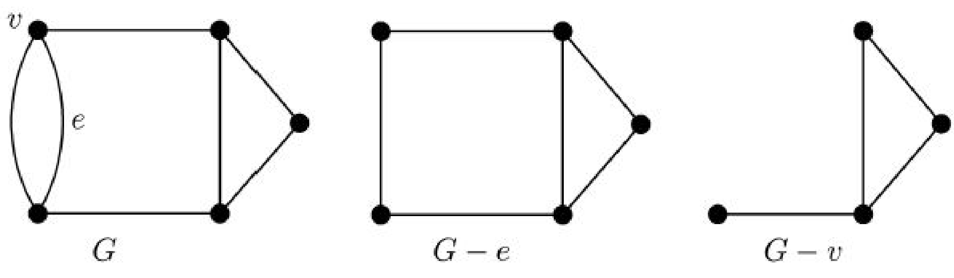
$$0 \leq \delta(G) \leq deg_G(v) \leq \Delta(G) \leq n - 1$$
$$deg_G(v) = |N_G(v)|, \ v \in V_G$$

Definicija 2.5 *Neka su G i H grafovi. Ako je $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$ i svaki brid grafa H ima iste krajeve u H kao što ih ima u G, onda kažemo da je H* ***podgraf*** *(engl. subgraph) grafa G i pišemo $H \subseteq G$. Također kažemo da je G* ***nadgraf*** *(engl. supergraph) grafa H.*

Definicija 2.6 ***Bipartitni graf*** *(engl. bipartite graph) graf je G čiji se skup vrhova može podijeliti u dva disjunktna skupa A i B tako da svaki brid iz E_G ima jedan kraj u A, a drugi u B. Kažemo da G ima biparticiju $[A, B]$ što označavamo s $G[A, B]$.*

Definicija 2.7 ***Težinski graf*** *(engl. weighted graph) uređeni je par (G, ω) gdje je G graf i funkcija $\omega : E_G \to \mathbb{R}^+$ svakom bridu e grafa G pridružuje nenegativan broj $\omega(e)$. Vrijednost $\omega(e)$ naziva se* ***težina brida*** *e. Težina podgrafa težinskog grafa ukupna je težina njegovih bridova.*

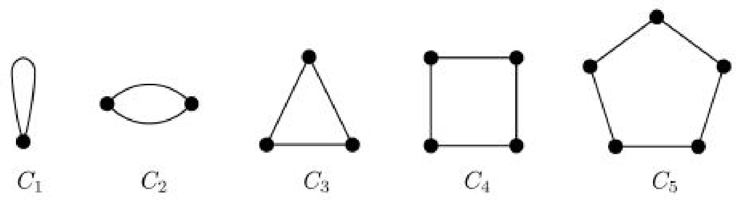
Podgraf se može dobiti uklanjanjem pojedinih bridova i/ili vrhova danog grafa. Ako je e brid grafa G, $G - e$ označava graf dobiven **uklanjanjem brida** e iz grafa G.
Slično tome, ako je v vrh grafa G, $G - v$ označava graf dobiven iz grafa G **uklanjanjem vrha** v zajedno s bridovima incidentnim vrhu v.



Slika 2.1: Primjer podgrafova dobivenih uklanjanjem brida ili vrha grafa

Definicija 2.8 *Kažemo da su grafovi $G = (V_G, E_G)$ i $H = (V_H, E_H)$* ***izomorfni****, uz oznaku $G \cong H$, ako postoje bijekcije $\theta : V_G \to V_H$ i $\phi : E_G \to E_H$ takve da su vrh $v \in V_G$ i brid $e \in E_G$ incidentni ako i samo ako su u H incidentne njihove slike $\theta(v)$ i $\phi(e)$. Takav par bijekcija (θ, ϕ) nazivamo* ***izomorfizam*** *grafova G i H.*

Ciklički graf ili **ciklus** (engl. cycle) neprazni je graf čije je vrhove moguće označiti tako da je $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ i $E = \{v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$, $n \geqslant 1$. Ciklički graf s n vrhova označava se s C_n i naziva n-ciklus. Očito je C_n 2-regularan graf.



Slika 2.2: Ciklički grafovi za $n \leq 5$

Definicija 2.9 ***Aciklički graf*** *je graf koji nema cikluse.*

Definicija 2.10 ***Triangulacija*** *je graf u kojem za svaki ciklus duljine $l \geqslant 3$ postoji brid koji spaja dva nesusjedna vrha.*

Definicija 2.11 ***Šetnja*** *(engl. walk) W u grafu G konačan je niz vrhova v_i i bridova e_i oblika v_0,e_1,v_1,e_2,...,e_l,v_l pri čemu su krajevi brida e_i vrhovi v_{i-1} i v_i. Vrh v_0 početni je vrh ili* ***početak****, a v_l završni vrh ili* ***završetak*** *šetnje W dok su v_1,v_2,...,v_{l-1}* ***unutarnji*** *vrhovi. Kažemo da je W šetnja od v_0 do v_l ili da je to (v_0, v_l)****-šetnja*** *te da su vrhovi v_0 i v_l* ***povezani šetnjom****. Broj bridova l naziva se* ***duljina šetnje****. Šetnja W je* ***zatvorena*** *ako je $v_0 = v_l$ inače je* ***otvorena****.*

Definicija 2.12 ***Staza*** *(engl. trail) u grafu šetnja je čiji su svi bridovi međusobno različiti. Staza s međusobno različitim vrhovima naziva se* ***put*** *(engl. path).* ***Trivijalna*** *šetnja (staza, put) sastoji se od jednog vrha i nema bridova, tj. ima duljinu 0.* ***Ciklus*** *u grafu zatvorena je staza koja sadrži barem jedan brid i ima međusobno različite unutarnje vrhove.*

Definicija 2.13 *Vrhovi u i v grafa G su* ***povezani*** *ako u G postoji (u, v)-put.* ***Udaljenost*** $d(u, v)$ *dvaju povezanih vrhova u i v duljina je najkraćeg (u, v)-puta. Ako u i v nisu povezani, uzimamo da je $d(u, v) = \infty$.*

Definicija 2.14 ***Struk*** *(engl. girth) grafa koji ima ciklus duljina je njegovog najkraćeg ciklusa dok je duljina najduljeg ciklusa njegov* ***opseg*** *(engl. circumference).*

Definicija 2.15 *Graf G* **povezan** *je ako su svaka dva njegova vrha povezana putem, inače je* ***nepovezan****. Povezani podgraf koji nije pravi podgraf ni jednog drugog povezanog podgrafa grafa G (povezani podgraf maksimalan po inkluziji) naziva se* ***komponenta povezanosti*** *ili kraće* ***komponenta*** *grafa G. Broj komponenti grafa G označavat ćemo s $c(G)$.*

Teorem 2.16 *Graf s barem dva vrha je bipartitan ako i samo ako nema ciklus neparne duljine.*

Dokaz. *Uzmimo da je G graf s $n \geqslant 2$ vrhova.*

Pretpostavimo da je G bipartitni graf. To znači da se njegov skup vrhova može podijeliti u dva disjunktna skupa, označimo ih s A i B, tako da je svaki brid grafa G incidentan s jednim vrhom iz A i s jednim vrhom iz B. Neka je $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{l-1} \to v_l \to v_0 \to$ ciklus u G duljine $l + 1$ i pretpostavimo da je v_0 iz A. Tada je v_1 iz B, v_2 iz A i tako redom, $v_{2i} \in A$ i $v_{2i+1} \in B$. Dakle, vrhovi ciklusa s parnim indeksom su u A, a s neparnim *indeksom su u B. Zbog toga što je $v_0 \in A$ i $v_l v_0$ brid ciklusa, vrh v_l je iz B pa je l neparan. Stoga je duljina ciklusa l + 1 paran broj. Time je dokazano da su svi ciklusi u G parne duljine.*

Dokažimo da graf G mora biti bipartitan ako nema ciklusa neparne duljine. Ako je G prazan graf, onda je G sigurno bipartitan. Uzmimo sada da G nije prazan graf, $E_G \neq \emptyset$. Ako je svaka netrivijalna komponenta povezanosti grafa bipartitan graf, onda je i on sam bipartitan pa je dovoljno dokazati da je svaka netrivijalna komponenta grafa G bipartitan graf. Stoga, bez gubitka općenitosti, možemo pretpostaviti da je G povezani graf. Neka je u po volji izabrani vrh grafa G. Za svaki vrh $v \in V_G$ jednoznačno je određena udaljenost $d(u,v)$ kao duljina najkraćeg (u,v)-puta. Stoga su dobro definirani skupovi: $X = \{x \in V_G \mid d(u,x)$ paran broj$\}$ i $Y = \{y \in V_G \mid d(u,y)$ neparan broj$\}$. Očito je $V_G = X \cup Y$ i $X \cap Y = \emptyset$. Ako $[X,Y]$ nije biparticija grafa G, onda postoje međusobno susjedni vrhovi w i z takvi da su oba iz X ili oba iz Y, to jest wz je brid u grafu G. Neka je P_1 najkraći (u,w)-put i P_2 najkraći (u,z)-put i t zadnji vrh u kojemu se P_1 i P_2 podudaraju. Zato što su P_1 i P_2 najkraći putevi, njihove (u,t)-dionice su iste duljine. Kako su P_1 i P_2 iste parnosti, njihove su preostale dionice (t,w) i (t,z) također iste parnosti. Nadovezivanjem (t,w)-puta i (t,z)-puta u vrhu t i dodavanjem brida wz dobije se ciklus neparne duljine u G, što je suprotno pretpostavci. Znači da je G bipartitni graf s biparticijom $[X,Y]$, što je i trebalo dokazati. ∎

Definicija 2.17 ***Vršni rez, rastavljajući vršni skup*** *ili skraćeno* ***rastavljajući skup*** *(engl. vertex-cut, separating set, separator, disconnecting vertex-set) povezanog grafa G skup je njegovih vrhova čijim se uklanjanjem dobije nepovezani graf. Najmanji broj vrhova povezanog grafa G čije uklanjanje rezultira nepovezanim grafom ili grafom samo s jednim vrhom naziva se* ***vršna povezanost*** *grafa i označava $\kappa_v(G)$ ili kraće κ_v. Za nepovezani* *graf uzima se da je $\kappa_v = 0$. Kažemo da je graf G k-**vršno povezan** ili kraće k-**povezan** ako je $k \leq \kappa_v(G)$, $k \in \mathbb{N}_0$.*

Definicija 2.18 ***Bridni rez*** *ili* ***rastavljajući bridni skup*** *(engl. edge-cut, disconnecting edge-set) povezanog grafa G skup je bridova čijim uklanjanjem G postaje nepovezan graf.* ***Bridna povezanost*** *$\kappa_e(G)$ ili kraće κ_e povezanog grafa G s barem dva vrha minimalan je broj bridova čije uklanjanje rezultira nepovezanim grafom. Za graf s jednim vrhom i nepovezani graf uzima se da je bridna povezanost $\kappa_e = 0$. Kažemo da je graf G k-**bridno povezan** kada je $k \leq \kappa_e(G)$, $k \in \mathbb{N}_0$.*

Definicija 2.19 *Neka je v vrh i e brid grafa G. Ako je $c(G - v) > c(G)$, v se naziva* ***rezni vrh*** *(engl. cut-vertex) grafa G. Brid e je* ***most*** *ili* ***rezni brid*** *(engl. bridge, cut-edge) grafa G ako je $c(G - e) > c(G)$.*

Definicija 2.20 *Povezani graf bez ciklusa nazivamo* ***stablo*** *(engl. tree).* ***Šuma*** *(engl. forest) je graf bez ciklusa.*

Definicija 2.21 ***Crtež grafa*** *$G = (V, E)$ u ravnini je preslikavanje ϱ definirano na skupu $V \cup E$ tako da vrijedi:*

1. *Vrhovima grafa pridružuju se međusobno različite točke ravnine.*

2. *Svakom bridu uv pridružuje se jednostavna krivulja $\varrho(uv)$ u ravnini kojoj su krajevi $\varrho(u)$ i $\varrho(v)$ te $\varrho(uv)$ ne sadrži sliku ni jednog drugog vrha iz V.*

Presijecanje *bridova grafa je zajednička unutarnja točka krivulja $\varrho(e_1)$ i $\varrho(e_2)$, $e_1, e_2 \in E$, tj. točka iz $\varrho(e_1) \cap \varrho(e_2)$ koja nije slika nekog vrha grafa G.*

Definicija 2.22 *Crtež grafa u ravnini koji nema presijecanja bridova naziva se* ***smještenje*** *(engl. embedding)* ***grafa u ravninu*** *ili* ***ravninsko***

smještenje grafa. ***Planarni*** *(engl. planar)* ***graf*** *ili graf* ***smjestiv u ravninu*** *(engl. embeddable in the plane) graf je koji ima ravninsko smještenje, odnosno koji se može nacrtati u ravnini bez presijecanja bridova. U protivnom kažemo da je graf* ***neplanaran***.

Definicija 2.23 *Ravninsko smještenje $\varrho(G)$ grafa G nazivamo* ***ravninski graf*** *(engl. plane graph),* ***ravninski prikaz*** *ili* ***ravninski crtež planarnog grafa*** *G.*

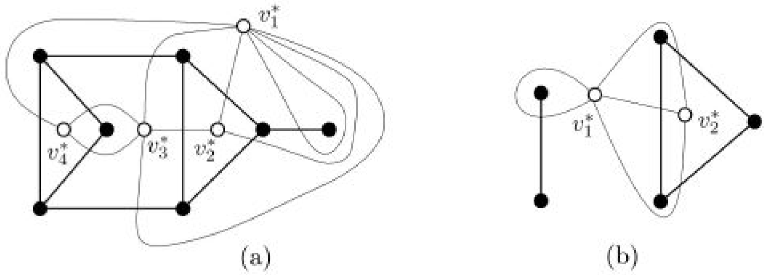
Definicija 2.24 *Područja ravnine određena ravninskim smještenjem grafa nazivamo* ***stranama*** *(engl. faces, regions) toga grafa. Neomeđena strana grafa je* ***vanjska***, *a ostale su* ***unutarnje***. *Kažemo da je strana* ***incidentna*** *nekom vrhu odnosno bridu ako oni pripadaju njezinom rubu. Dvije strane su* ***susjedne*** *ako su incidentne istom bridu. Strana incidentna reznom bridu je* ***sebi susjedna***.

Stupanj $d(s)$ strane s je broj bridova u njezinom rubu, pri čemu se rezni bridovi broje dvostruko. Za isti ovaj pojam koristi se i termin duljina strane i oznaka $l(s)$. Skup strana ravninskog smještenja planarnog grafa G označit ćemo s $\mathcal{F}$ ili $F(G)$. Analogno teoremu 2.4 vrijedi i $\sum_{s\in\mathcal{F}} d(s) = 2m$.

Definicija 2.25 *Za ravninski graf G definirat ćemo graf G^* kako slijedi:*

- *Unutar svake strane f_i grafa G biramo točku v_i^* . Točke v_i^* uzimamo za vrhove grafa G^*.*
- *Za svaki brid e grafa G povlačimo luk e^* koji presijeca e u točno jednoj unutarnjoj točki (ali ne i neki drugi brid iz G) i povezuje vrhove unutar strana incidentnih s e. Ovi su lukovi bridovi grafa G^*.*

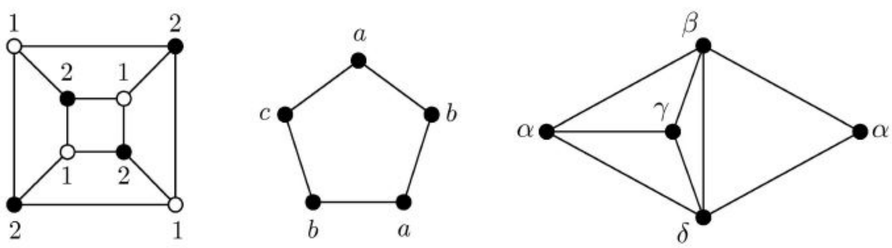
Graf G^* naziva se ***geometrijski dual*** *ili kratko* ***dual*** *ravninskog grafa G.*



Slika 2.3: Primjeri konstrukcije geometrijskog duala

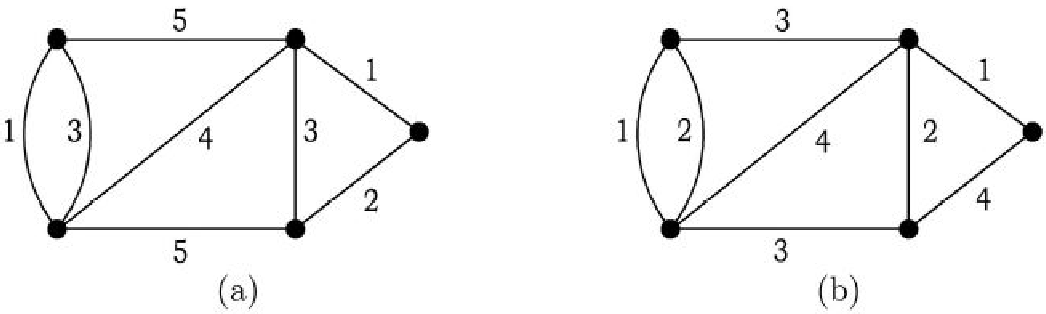
Definicija 2.26 *Neka je $B = \{1, 2, ..., k\}$ ili je B neki drugi skup kardinalnosti k. Za graf G* ***k-bojenje vrhova*** *je preslikavanje f skupa njegovih vrhova u skup B, $f : V_G \to B$. Elemente skupa B nazivamo bojama i kažemo da je vrh v obojen bojom $i \in B$ ako je $f(v) = i$.*
Bojenje vrhova grafa je ***pravilno*** *ako su susjednim vrhovima pridružene različite boje. Graf G je* ***vršno*** *k-**obojiv** ili kraće k-**obojiv** ako postoji pravilno k-bojenje njegovih vrhova. Ako je graf G k-obojiv i nije $(k-1)$-obojiv, onda kažemo da je G k-**kromatski** (engl. k-chromatic) graf, odnosno da je* ***kromatski broj*** *$\chi(G)$ grafa G jednak k.*

Dakle, graf G je k-obojiv ako je svakom vrhu moguće dodjeliti jednu od k boja, tako da susjedni vrhovi imaju različite boje. Kromatski broj $\chi(G)$ grafa G je najmanji broj boja za koje postoji pravilno bojenje njegovih vrhova.



Slika 2.4: Primjeri bojenja vrhova

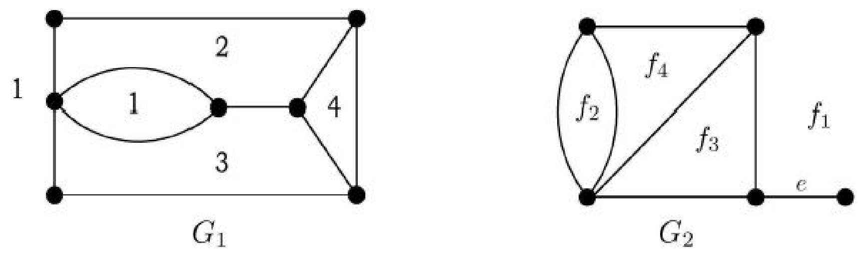
Definicija 2.27 *Za prirodan broj k, k-**bridno bojenje** grafa G je preslikavanje* $f : E_G \to B$ *skupa bridova u skup B čiji se elementi nazivaju bojama, gdje je* $B = \{1, 2, ..., k\}$ *ili neki drugi k-člani skup. Bojenje bridova grafa je **pravilno** ako su susjedni bridovi različito obojeni. Graf G je **bridno k-obojiv** ako postoji pravilno k-bojenje njegovih bridova. **Bridni kromatski broj** (engl. edge chromatic number) ili **kromatski indeks** (engl. chromatic index)* $\chi'(G)$ *grafa G je najmanji broj različitih boja za koji je moguće pravilno bridno bojenje grafa G. Graf G je **bridno** k-**kromatski** ako je* $\chi'(G) = k$.



Slika 2.5: Graf s pravilnim bridnim bojenjima

Definicija 2.28 ***Linijski graf*** *grafa G graf je L(G) takav da postoji bijekcija skupa* $V_{L(G)}$ *njegovih vrhova u skup* E_G *bridova grafa G, a dva su vrha iz* $V_{L(G)}$ *susjedni ako i samo ako su odgovarajući bridovi iz* E_G *susjedni u grafu G. Posebno se može uzeti* $V_{L(G)} = E_G$.

Definicija 2.29 *Neka je $\mathcal{F}$ skup strana ravninskog grafa G, a s B neki neprazan skup kardinalnosti k. Preslikavanje $f : \mathcal{F} \to B$ nazivamo k-**bojenje strana grafa** G. Elemente skupa B zvati ćemo bojama. Bojenje strana grafa G je **pravilno** ako su za svaki brid $e \in E_G$ strane incidentne s e različito obojene. Graf G je k-**obojiv po stranama** ako postoji pravilno k-bojenje njegovih strana.*



Slika 2.6: Primjer pravilnog bojenja strana grafa

Ravninska karta, ili kraće **karta** je smještenje u ravnini 3-bridno povezanog planarnog grafa. **Bojenje karte** je bojenje njezinih strana. **Kromatski broj** karte je najmanji broj boja za koje postoji njezino pravilno bojenje.

Definicija 2.30 ***Acikličko bojenje*** *(engl. acyclic coloring) grafa je pravilno bojenje takvo da unija bilo koje dvije klase boja inducira aciklički podgraf, ekvivalentno, niti jedan ciklus nije 2-obojiv.*

Poglavlje 3

Metoda pražnjenja

Prvo se osvrnimo na sami naziv "pražnjenje". Naziv dolazi od engleske riječi discharging, a metoda uključuje postavljanje chargova i njihovo pomicanje po grafu. To smo preveli kao pražnjenje i naboji. Naboj je proizvoljan realan broj, može biti pozitivan i negativan. Formula pražnjenja je jednadžba koja vrijedi za promatrane grafove. Cijela tehnika pražnjenja je „most" između formule pražnjenja i specifičnog svojstva grafa koje nas zanima. Navedena metoda se često koristi u bojenjima grafova, a najpoznatija je po svojoj središnjoj ulozi u dokazu teorema o četiri boje.
Svako pravilo pražnjenja zadržava zbroj naboja. Pravila su osmišljena tako da nakon faze pražnjenja svaka strana ili vrh s pozitivnim nabojem leži u jednom od željenih podgrafova. Budući da je zbroj naboja pozitivan, neka strana ili vrh moraju imati pozitivan naboj. Uspješna primjena metode pražnjenja zahtijeva kreativno osmišljavanje njezinih pravila.

3.1 Formulacija

Metoda se sastoji od 2 dijela:

1. FAZA PUNJENJA

- Pridružiti naboje nekim elementima grafa (vrhovi, strane, bridovi).
- Izračunati ukupni naboj pridružen cijelom grafu.

2. FAZA PRAŽNJENJA

- Preraspodijeliti naboje u grafu prema skupu pravila pražnjenja.
- Izračunati ukupne naboje ponovno (obično pomoću posebnih svojstava grafa) i izvesti zaključak.

Ovo je samo grubi kostur tehnike. Navedeni koraci mogu izgledati drugačije u praktičnim primjenama. Metoda pražnjenja se opisuje općenito kako bi se mogla primjeniti na širok raspon problema.

Definicija 3.1 ***Punjenje vrhova*** *je dodjeljivanje "početnog naboja" svakom vrhu v.*

Definicija 3.2 ***Punjenje bridova*** *je dodjeljivanje "početnog naboja" svakom bridu e.*

Definicija 3.3 ***Punjenje strana*** *je dodjeljivanje "početnog naboja" svakoj strani f.*

Sljedećih nekoliko pojmova često se koristi u primjerima metode pražnjenja.

Definicija 3.4 ***Maksimalni prosječni stupanj*** *grafa G, u oznaci* $mad(G)$ *je maksimalni broj svih prosječnih stupnjeva nad svim podgrafovima od G.*

S $\overline{d}(G)$ označavamo **prosjek stupnjeva** vrhova u G.

Promotrimo kako metoda funkcionira na jednostavnom primjeru.

Lema 3.5 *Ako je $\overline{d}(G) < 3$, onda G ima 1^--vrh ili 2^--vrh sa 5^--susjedom.*

Dokaz. *Koristimo punjenje vrhova, svaki vrh v na početku ima naboj $d(v)$. Pretpostavimo da G nema 1^--vrh i da niti jedan 2^--vrh nema 5^--susjeda. Definirat ćemo pravilo pražnjenja tako da svaki vrh završi s nabojem najmanje 3. 2-vrhovi trebaju naboj, 4^+-vrhovi mogu dati naboj. Navedimo pravilo pražnjenja:*

- *Svaki 2-vrh uzima naboj veličine $\frac{1}{2}$ od svakog susjeda.*

Sada svaki 2-vrh ima naboj 3, budući da dva 2-vrha nisu susjedna. Vrhovi stupnjeva 3,4,5 ne gube naboj jer smo pretpostavili da niti jedan 2-vrh nema 5^--susjeda. Svaki 6^+-vrh v daje svakom 2-susjedu naboj od $\frac{1}{2}$, na kraju ostaje s nabojem najmanje $d(v)/2$, što je najmanje 3 kada je $d(v) \geqslant 6$. Slijedi da je $\overline{d}(G) \geqslant 3$ kada nijedan 2-vrh nema 5^--susjeda, što je kontradikcija s $\overline{d}(G) < 3$. ■

Promotrimo lemu 3.5 općenitije. Kada želimo da graf G s $mad(G) < b$ ima 1^--vrh ili 2-vrh s j^--susjedom pogledajmo koji je najbolji izbor za b. Moramo pokazati da b može biti najviše 3, jer inače G može biti 3-regularan bez 2-vrha. Kada zanemarimo 1^--vrhove i koristimo punjenje stupnjeva, samo će 2-vrhovi trebati naboj kojeg će uzeti od svojih susjeda. Pretpostavimo da svaki 2-vrh uzima naboj količine ρ od svakog susjeda. Konačni naboj na svakom vrhu je najmanje b ako i samo ako 2-vrhovi dobivaju dovoljno naboja. Vrhovi sa stupnjem većim od j mogu izgubiti ρ na svakog od susjeda, tako da trebamo $2 + 2\rho \geqslant b$ i $d - d\rho \geqslant b$ kada je $d \geqslant j + 1$. Da bismo pronašli najveći b koji odgovara, stavimo $2 + 2\rho = (j + 1)(1 - \rho)$, dobivamo $\rho = \frac{j-1}{j+3}$ pa je $b = 2 + 2\rho = 4\frac{j+1}{j+3}$. Za $j = 5$ dobivamo lemu 3.5.

Poglavlje 4

Primjena metode pražnjenja u planarnim grafovima

Konfiguracija (engl. configuration) u grafu G je bilo koja struktura u G (često vrsta podgrafa). Konfiguracija je **reducibilna** za svojstvo Q grafa ako se ne može pojaviti u minimalnom grafu koji nema svojstvo Q.

Lagani podgrafovi (engl. light subgraphs) su podgrafovi s relativno malim zbrojem stupnjeva. Lagani podgrafovi mogu biti reducibilne konfiguracije za probleme bojenja. Dokazujemo neke rezultate s ravnomjernim punjenjem ili punjenjem strana koji su izvorno bili dokazani punjenjem vrhova. Najpoznatiji rezultat o laganim bridovima (light edges) je Kotzigov teorem koji kaže da svaki 3-povezani planarni graf ima brid težine najviše 13.

Kontekst ograničenog $mad(G)$ ostaje isti kod proučavanja planarnih grafova. Po teoremu 2.4 dobivamo da je $mad(G) \leq 6$. Označimo sa s struk grafa. Tada vrijedi nejednakost $m \leq \frac{s}{s-2}(n-2)$. Uklanjanjem bridova ne možemo dobiti male cikluse, tako da je $mad(G) \leq \frac{2s}{s-2}$ kada je G planarni graf sa strukom s.

Metoda pražnjenja je vrlo prikladna za dokazivanje tvrdnji iz područja planarnosti. Posebno, kod planarnih grafova se naboj može dodjeliti stranama, koje su vrhovi u dualnom grafu G^*. S obzirom da je G^* također planaran vrijedi $mad(G^*) < 6$ i možemo koristiti pražnjenje i na G i na G^*. Za početak navodimo teorem i propoziciju koji će nam biti korisni u dokazivanju tvrdnji.

Teorem 4.1 *(Euler, 1750) Neka je G smještenje u ravnini povezanog planarnog grafa, a n, m i f označavaju redom broj vrhova, broj bridova i broj strana grafa G. Tada vrijedi Eulerova formula*

$$n - m + f = 2 \tag{4.1}$$

Dokaz. *Teorem ćemo dokazati indukcijom po broju m bridova grafa G. Ako je $m = 0$, onda je $n = 1$ (jer je G povezan) i $f = 1$. Očito je tada $n - m + f = 1 - 0 + 1 = 2$ pa tvrdnja vrijedi za bazu indukcije. Uzmimo sada da je G graf s $m \geqslant 1$ bridova. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve grafove s manje od m bridova. Ako je G stablo, onda je $m = n - 1$ i $f = 1$, pa vrijedi $n - m + f = n - (n - 1) + 1 = 2$. Ako G nije stablo, uzmimo da je e brid u nekom od ciklusa grafa G. Tada je $G - e$ povezani planarni graf s n vrhova, $m - 1$ bridova i $f - 1$ strana. Po indukcijskoj pretpostavci $n - (m - 1) + (f - 1) = 2$ što daje $n - m + f = 2$. Time je tvrdnja dokazana za sve $m \in \mathbb{N}_0$.* ■

Propozicija 4.2 *Ako je G povezani jednostavni planarni graf s m bridova i $n \geqslant 3$ vrhova, onda vrijedi $m \leq 3n - 6$.*

Dokaz. *Ako graf G nema ciklusa, onda je G stablo i $m = n - 1$ pa za $n \geqslant 3$ tvrdnja vrijedi. Naime, bit će $3n - 6 = (n - 1) + (2n - 5) > n - 1 = m$ jer je $2n - 5 > 0$. Ako graf G sadrži ciklus, onda svaka strana ima rub od barem 3 brida (G je jednostavni graf pa nema ciklusa duljine 2) pri čemu je svaki brid incidentan s najviše dvije strane. Aka je f broj strana ravninskog prikaza grafa G, brojenjem incidencija bridova i strana zaključujemo da je*

$3f \leq 2m$. Iz ove nejednakosti i Eulerove formule $f = m - n + 2$ slijedi da je $m \leq 3n - 6$. Time je dokaz završen. ■

Početni naboj koji se dodjeljuje vrhu v je najčešće njegov stupanj $d(v)$.
S obzirom da je za planarni graf G $mad(G) \leq 6$, metodu pražnjenja na planarnim grafovima koristit ćemo najčešće temeljem sljedeće propozicije.

Propozicija 4.3 *Neka su V(G) i F(G) skupovi vrhova i strana u planarnom grafu G, neka je l(f) duljina strane f. Tada za G vrijede sljedeće jednakosti:*

$$\sum_{v\in V(G)}(d(v)-6)+\sum_{f\in F(G)}(2l(f)-6)=-12 \text{ - } \textit{punjenje vrhova}$$

$$\sum_{v\in V(G)}(2d(v)-6)+\sum_{f\in F(G)}(l(f)-6)=-12 \text{ - } \textit{punjenje strana}$$

$$\sum_{v\in V(G)}(d(v)-4)+\sum_{f\in F(G)}(l(f)-4)=-8 \text{ - } \textit{ravnomjerno punjenje}$$

Dokaz. *Pomnožimo Eulerovu formulu s -6 ili -4, rastavimo pribrojnik za bridove i dobivamo sljedeće 3 formule.*
$-6n + 2m + 4m - 6f = -12$, $-6n + 4m + 2m - 6f = -12$,
$-4n + 2m + 2m - 4f = -8$.
U svakoj jednadžbi, zamijenimo prvo pojavljivanje m s $\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d(v)$, a drugo s $\frac{1}{2}\sum_{f\in F(G)} l(f)$ i onda tvrdnje lako slijede grupiranjem pribrojnika.
■

Primijetimo da se u sva tri slučaja pune i vrhovi i strane. Prvo ćemo nazivat punjenje vrhova, drugo punjenje strana, a treće ravnomjerno punjenje. Kao početni naboji ne koriste se stupnjevi vrhova ili strana, nego izrazi iz ovih jednadžbi, npr. $d(v) - 6$ za naboj vrha. Vrh ili strana su „sretni" kada dosegnu nenegativan naboj. Ako su svaki vrh i strana "sretni" dobivamo kontradikciju na isti način kao kod punjenja vrhova, to čini lijevu stranu nenegativnom, dok je desna strana negativna.

U načelu, svaki rezultat koji se može dokazati jednom od ove 3 metode pražnjenja, može se također dokazati i pomoću ostalih. Ovisno o kontekstu, pomoću nekih će dokazi možda biti jednostavniji.

Za dokaze o triangulacijama, kao što je i u slučaju problema četiri boje, koristi se punjenje vrhova. Sve strane imaju naboj 0 i često ih se može zanemariti. Punjenje vrhova planarnih grafova gdje je naboj $d(v) - 6$ je ekvivalentno punjenju vrhova gdje je naboj $d(v)$. Za 3-regularne planarne grafove koristi se punjenje strana, pri čemu je svakom vrhu pridružen naboj 0. Kada su G i G^* jednostavni, 3-vrhovi i 3-strane su jedini objekti kojima je potreban naboj, one sa stupnjem ili duljinom najmanje 5 imaju višak za predati.

Teorem 4.4 *Ako planarni graf ima minimalni stupanj 5, onda on ima brid s krajnjim 5-vrhovima ili brid s krajnjim 5-vrhom i 6-vrhom.*

Dokaz. *Koristimo $V(G)$, $F(G)$, $E(G)$ za označavanje skupova vrhova, strana i bridova. U ovom slučaju laganim bridom nazivamo brid kojem su oba vrha stupnja 5 ili stupnjeva 5 i 6. Da bi se dokazao teorem, dovoljno je promatrati samo planarne triangulacije.*

Proizvoljno dodajemo bridove dok graf ne postane triangulacija. Budući da je početni graf imao minimalni stupanj 5, svaki vrh novog brida ima stupanj najmanje 6. Dakle, nijedan novi brid nije lagani brid. Stoga, ako triangulacija sadrži lagani brid, tada je taj brid morao biti u početnom grafu.

Početni naboj je 6–$d(v)$ *za svaki vrh* v*, te* $6 - 2d(f)$ *za svaku stranu* f*. (Graf je triangulacija pa je naboj na svakoj strani 0). Koristeći propoziciju 4.3 lako vidimo da je zbroj svih naboja 12.*

Koristimo samo jedno pravilo pražnjenja:

- *Svaki vrh stupnja 5 daje naboj veličine* $\frac{1}{5}$ *svakom susjedu.*

Promatramo koji bi vrhovi mogli imati pozitivan završni naboj. Jedini vrhovi s pozitivnim početnim nabojem su vrhovi stupnja 5. Svaki vrh stupnja 5 daje *naboj od $1/5$ svakom susjedu. Svakom vrhu je dan ukupni naboj od najviše $\frac{d(v)}{5}$. Početni naboj svakog vrha v je $6 - d(v)$, a završni naboj svakog vrha je najviše $6 - \frac{4d(v)}{5}$. Dakle, vrh može imati pozitivan završni naboj samo ako ima stupanj najviše 7. Sada pokazujemo da je svaki vrh s pozitivnim završnim nabojem susjedan krajnjem vrhu laganog brida.*

Ako vrh v ima stupanj 5 ili 6 i pozitivan završni naboj, dakle vrh v je dobio naboj od susjednog vrha u stupnja 5, onda je brid uv lagani brid.

Ako vrh v ima stupanj 7 i pozitivan završni naboj, dakle vrh v je dobio naboj od najmanje 6 susjednih vrhova stupnja 5. S obzirom da je graf triangulacija, vrhovi susjedni vrhu v moraju tvoriti ciklus. Susjedi stupnja 5 ne mogu svi biti odvojeni vrhovima višeg stupnja (jer vrh v ima stupanj 7). Najmanje dva od susjeda stupnja 5 moraju biti jedan do drugog u ovom ciklusu. Oni čine lagani brid. ■

Normalna ravninska karta je ravninski graf takav da je svaki stupanj vrha i duljina strane najmanje 3. Svaki ravninski graf sa minimalnim stupnjem najmanje 3 je normalna ravninska karta (normal plane map). Jendrol je dao kratak dokaz da svaka normalna ravninska karta G ima brid s težinom najviše 11 ili 3-vrh s 10-susjedom. Modificiramo taj dokaz kako bi dobili Borodinovo proširenje Kotzigovog teorema.

Teorem 4.5 *(Borodin) Normalna ravninska karta G ima brid s težinom najviše 11 ili* 4*-ciklus kroz dva* 3*-vrha i zajedničkog* 10^{-}*-susjeda.*

Dokaz. *Pretpostavimo da G nema lagani brid (s težinom najviše 11). Ako neka strana F ima duljinu veću od 3, onda povezivanjem susjeda vrhova strane sa najmanjim stupnjem ne možemo dobiti lagani brid. Pretpostavimo da svaka strana ima duljinu 3. Koristimo punjenje vrhova.*

Navedimo pravilo pražnjenja:

- *Svaki* 5^{-}*-vrh v uzima naboj veličine* $\frac{6-d(v)}{d(v)}$ *od* 7^{+}*-susjeda.*

S obzirom da je G triangulacija bez bridova težine najviše 11, k-vrh gubi naboj na najviše $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ vrhova. 7-vrh daje naboj samo 5-vrhovima, ukupno daje najviše $3 \cdot \frac{1}{5}$ i ostaje pozitivan. 8-vrh daje naboj samo na 4-vrh, ukupno daje najviše $4 \cdot \frac{1}{2}$ i ostaje nenegativan. Za $d(v) \geqslant 9$, susjedi od v mogu imati stupanj 3 i dobiti naboj 1, ali konačni naboj je $\lceil \frac{d(v)}{2} \rceil$, koji je nenegativan kada je $d(v) \geqslant 11$.

Konačno, pretpostavimo da je $d(v) \in \{9, 10\}$. Budući da strane imaju duljinu 3, susjedi od v čine zatvorenu šetnju duljine $d(v)$ promatrajući redom, a svaki 3-vrh se pojavljuje samo jednom u šetnji. Uz lagani brid i zabranjena navedena 4-ciklusa, 3-vrhovi moraju biti odvojeni za najmanje 3 koraka duž ove šetnje. S obzirom da nema laganog brida, svaki 9-vrh ima najviše četiri 5-susjeda. Ako ima najmanje tri 3-susjeda, onda ima točno tri i ne gubi naboj na ni jednom drugom vrhu, stoga 9-vrh gubi $max\{3 \cdot 1, 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\}$. 10-vrh ima najviše 5^{-}-susjeda, a ako ima najmanje tri 3-susjeda onda ima najviše četiri 5-susjeda i gubi $max\{4 \cdot 1, 2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}\}$, pa zaključujemo da vrijedi tvrdnja. ■

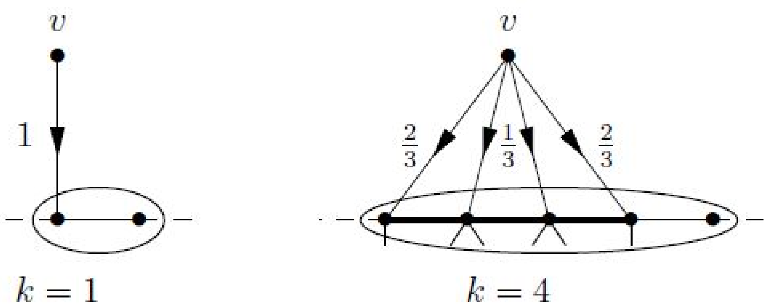
Sada navodimo još jedan rezultat o strukturi u planarnim grafovima.

Teorem 4.6 *Svaki planarni graf ima 5^{-}-vrh s najviše dva 12^{+}-susjeda.*

Dokaz. *Pretpostavimo da je G triangulacija, pa vrijedi $\delta(G) \geqslant 3$ i pretpostavimo da ne postoji vrh s traženim svojstvom. Koristimo punjenje vrhova, a zbog planarnosti vrijedi $mad(G) < 6$. Navedimo pravilo pražnjenja:*

- *Svaki 5^{-}-vrh u uzima naboj veličine $\frac{6-d(u)}{3}$ od svakog 12^{+}-susjeda.*

Tada j-vrhovi za $6 \leq j \leq 11$ ne gube naboj. Moramo pokazati da će na ovaj način 5^{-}-vrhovi dobiti dovoljno naboja, a 12^{+}-vrhovi neće izgubiti previše. Od svakog 12^{+}-susjeda svaki 3-vrh će dobiti naboj veličine 1, svaki 4-vrh naboj *veličine* $\frac{2}{3}$, *a 5-vrh naboj veličine* $\frac{1}{3}$. *Neka je* v 12^+*-susjed*[1]. *S obzirom da je* G *triangulacija, susjedi od* v *čine ciklus* C *koji možda ima poprečne bridove, odnosno bridove koji spajaju vrhove trokuta koji nisu zajednički. Neka je* H *podgraf ciklusa* C *induciran njegovim vrhovima čiji je stupanj najviše 5 u grafu* G. *Svaki* 5^-*-vrh* w *ima najmanje tri* 12^+*-susjeda, pa vrijedi* $d_H(w) \leq d_G(w) - 3$. *Ako svi susjedi od* v *imaju stupanj 5, onda* v *gubi* $\frac{d(v)}{3}$ *naboja i završava sa* $\frac{2}{3}d(v)$, *što iznosi najmanje 8. Ako nemaju svi susjedi vrha* v *stupanj 5, onda su komponente od* H *putevi. Promotrimo put* P *s* k *vrhova zajedno s jednim dodanim vrhom koji je sljedeći u ciklusu, a nije iz* H. *Ako je* $k = 1$, *onda* v *daje naboj 1 na ova dva vrha (slika 5.1). Ako je* $k > 1$, *onda* v *daje najviše* $\frac{1}{3}$ *unutarnjim vrhovima puta* P *čiji je stupanj najmanje 5 i najviše* $\frac{2}{3}$ *krajnjim vrhovima čiji je stupanj najmanje 4. Zaključujemo da promatranih* $k+1$ *vrhova od vrha* v *može dobiti najviše* $0+2\cdot\frac{2}{3}+(k-2)\cdot\frac{1}{3} = \frac{k+2}{3}$, *a to je manje od* $\frac{k+1}{2}$ *kada je* $k > 1$. *Vrh* v *ukupno gubi najviše* $\frac{d(v)}{2}$, *pa mu naboj ostaje najmanje 6 kada je* $d(v) \geqslant 12$. ■



Slika 4.1: Konačni slučaj za teorem 4.6

[1] 12^+-vrh koji je susjed barem jednom 5^--vrhu

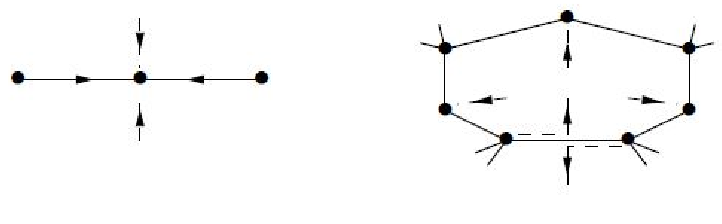
Teorem 4.7 *Svaki planarni graf G struka najmanje 7 i $\delta(G) \geqslant 2$ ima 2-vrh sa 3^--susjedom.*

Dokaz. *Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi za graf G i koristimo punjenje strana. Neka su početni naboji vrhova $2d(v) - 6$, a početni naboji strana $l(f) - 6$. Kada G ima struk (najmanji stupanj strane) najmanje 7, jedino 2-vrhovi imaju negativan početni naboj. Navedimo pravilo pražnjenja:*

- *Svaki 2-vrh uzima naboj veličine $\frac{1}{2}$ od svakog susjeda i incidentne strane.*

Provjerimo završavaju li svi vrhovi i strane s nenegativnim nabojem. Pravilo pražnjenja osigurava da 2-vrhovi završe s nabojem 0. S obzirom da 3-vrhovi nemaju 2-susjeda, njihov naboj ostaje 0.

Za $j \geqslant 4$, j-vrh može predati $\frac{1}{2}$ preko svakog brida i završiti s nabojem barem $2j - 6 - \frac{j}{2}$, koji je nenegativan. j-strana ima najviše $\lfloor \frac{j}{2} \rfloor$ incidentna 2-vrha, s obzirom da 2-vrhovi nisu susjedni. Zaključujemo da j-strana ima konačni naboj najmanje $j - 6 - \frac{1}{2}\lfloor \frac{j}{2} \rfloor$, koji je nenegativan za $j \geqslant 8$. Zbog lakšeg dokaza za 7-strane, uvodimo još jedno pravilo pražnjenja. Kada su dva 4^+-vrha susjedna bridom e, onda usmjerimo naboj $\frac{1}{2}$, koji bi svaki od ovih vrhova poslao svom 2-susjedu, tako da dvije strane koje omeđuju e dobiju $\frac{1}{2}$. Sada, 7-strane koje daju $\frac{3}{2}$ za tri 2-vrha, nadoknade $\frac{1}{2}$ od dva susjedna 4^+-vrha i završavaju s nabojem 0. ■



Slika 4.2: Pražnjenje za teorem 4.7

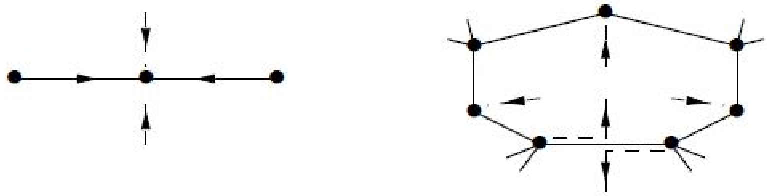
Ovaj dokaz pokazuje preusmjeravanje naboja i pravila pražnjenja za vrhove. Potrebna su dodatna pravila pražnjenja za vrhove koji su dosta izgubili. Ravnomjerno punjenje daje jednostavniji dokaz pražnjenja kada 2-vrh i 3-vrh trebaju naboj.

Teorem 4.8 *Svaki ravninski graf G sa $\delta(G) \geqslant 3$ ima dvije 3-strane sa zajedničkim bridom, j-stranu gdje je $4 \leq j \leq 9$ ili 10-stranu čiji su svi vrhovi stupnja 3.*

Dokaz. *Neka je G ravninski graf s $\delta(G) \geqslant 3$ za kojeg ne vrijede navedene pretpostavke. Koristimo punjenje strana, svakom vrhu dajemo naboj od $2d(v)-6$, a svakoj strani $l(f)-6$, ukupan naboj je -12. Budući da je $l(f) < 4$ i $l(f) > 9$ početni negativni naboj imaju samo trokuti i iznosi -3. Navedimo pravila pražnjenja:*

- *Svaki trokut uzima naboj veličine 1 sa svake susjedne strane.*
- *Svaka strana f uzima naboj veličine 1 od svakog incidentnog 4^+-vrha koji pripada barem jednom trokutu koji dijeli brid s f (slika 4.3).*

3-strane su sada sretne, a 3-vrhovi ostaju s nabojem 0. Ostali vrhovi su sretni jer 3-strane nemaju zajedničke bridove. Za $j \geqslant 4$, j-vrh gubi najviše naboj $\lfloor \frac{j}{2} \rfloor$, a završava s barem $\lceil \frac{3j}{2} \rceil - 6$ naboja koji je nenegativan za $j \geqslant 4$. Promotrimo sada j-stranu f za $j \geqslant 10$. Gubi naboj veličine 1 za svaki put duž svakog ruba ondje gdje su susjedne strane trokuti i rubni vrhovi imaju stupanj 3. Svakoj od tih strana f daje 1, ali dobiva 1 iz svakog 4^+ vrha. Ako rubni vrh maksimalnog takvog puta ima stupanj najmanje 4, u konačnici nema gubitka. Gubitak za f je dakle najviše $\lfloor \frac{j}{2} \rfloor$, a konačni naboj je najmanje $\lceil \frac{3j}{2} \rceil - 6$, a to je nenegativan broj za $j \geqslant 11$. Dakle, negativni naboj se može pojaviti samo na 10-strani. 10-strana f mora izgubiti naboj veći od 4 kako bi postala negativna, a to zahtijeva 5 puteva gdje f gubi 1. Putevi moraju biti *pojedinačni bridovi koji nemaju zajedničkih vrhova, a svi vrhovi incidentni sa f moraju imati stupanj 3.* ■



Slika 4.3: Pražnjenje za teorem 4.8

Poglavlje 5

Primjena metode pražnjenja u bojenju grafova

Pogledajmo sada kako se metoda pražnjenja koristi u nekoliko problema bojenja. Promotrimo primjenu pojma reducibilne konfiguracije u k-bridnom bojenju. Prvo dajemo propoziciju, a rezultat je u teoremu 5.2.

Propozicija 5.1 *Brid s težinom*[1] *najviše k+1 je reducibilna konfiguracija za svojstvo k-bridnog bojenja.*

Dokaz. *Promatramo svojstvo k-bridnog bojenja. Neka je* G *graf koji ima brid* e *težine najviše* $k+1$. *Ako je graf* $G-e$ k*-bridno obojiv, onda postoji boja za proširenje bojenja na* e*, jer je* e *incidentan sa najviše* $k-1$ *drugih bridova. Promotrimo sada minimalni graf* G *sa* $\chi^{'}(G) > k$*, tada graf nema svojstvo* k*-bridnog bojenja za konfiguraciju s bridom težine najviše* $k+1$*, pa po definiciji slijedi da je konfiguracija reducibilna.* ∎

Primjetimo da uvijek vrijedi $\chi^{'}(G) \geqslant \Delta(G)$. Vizingov teorem navodi da je uvijek $\chi^{'}(G) \leq \Delta(G)+1$, a odrediti kada je $\chi^{'}(G) = \Delta(G)$ i $\chi^{'}(G) = \Delta(G)+1$

[1] suma stupnjeva krajeva tog brida

je jedan od težih problema u bojenju grafova.

Teorem 5.2 *Ako je* $mad(G) < 3$ *i* $\Delta(G) \geqslant 6$*, onda vrijedi* $\chi^{'}(G) = \Delta(G)$*.*

Dokaz. *Fiksirajmo* $k \in \mathbb{Z}$*,* $k \geqslant 6$*. Dokazujemo općenitiju tvrdnju:*

- *Ako je* $mad(G) < 3$ *i* $\Delta(G) \leq k$*, onda je* $\chi^{'}(G) \leq k$*.*

U grafovima (podgrafovima) s $mad(G) < 3$ *i* $\Delta(G) \leq k$ *ne postoji minimalni graf (podgraf) koji zadovoljava* $\chi^{'}(G) > k$*. Bez smanjenja općenitosti, možemo promatrati graf bez izoliranih vrhova. Prema lemi 3.5 graf G tada ima* 1*-vrh ili* 2*-vrh sa* 5^{-} *-susjedom. Brid incidentan sa* 1*-vrhom ima težinu najviše* $\Delta(G) + 1$*, a brid koji spaja* 2*-vrh sa* 5^{-}*-susjedom ima težinu najviše 7. Zaključujemo da je težina svakog brida e najviše* $k + 1$*, po propoziciji 5.1 slijedi da G nije minimalni graf koji zadovoljava* $\chi^{'}(G) > k$*, iz čega slijedi da je* $\chi^{'}(G) \leq k$*.* ■

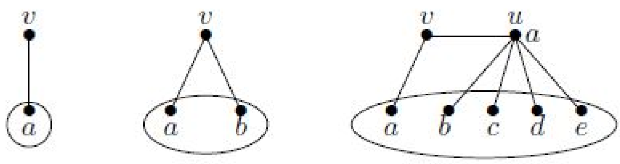
Bojenje i bridno bojenje smo već definirali u uvodu, a sada uvedimo još neke vrste bojenja kako bismo mogli promotriti više primjera metode pražnjenja.
Dodjeljivanje liste (engl. list assignment) L grafu G pridružuje svakom vrhu v skup $L(v)$ boja, koje nazivamo lista. U k-uniformnoj listi, svaka lista ima veličinu k. Graf G je L-**obojiv** ako postoji pravilno bojenje ϕ grafa G tako da je $\phi(v) \in L(V)$ za sve $v \in V(G)$. Graf G je k-**lisno izabirljiv** (engl. choosable) ako je G L-obojiv kad god svaka lista ima veličinu najmanje k (možemo pretpostaviti da je L k-uniformna). **Kromatski broj liste** u oznaci $\chi_l(G)$ je najmanji k takav da je G k-lisno izabirljiv. Analogno za bojenje bridova.

Dodjeljivanje bridne liste (engl. edge-list assignment) L je dodjeljivanje popisa dostupnih boja bridovima grafa G. S obzirom na L, L-**bojenje bridova** ϕ je pravilno bojenje bridova takvo da je $\phi(e) \in L(e)$ za sve $e \in E(G)$. Graf G je k-**bridno izabirljiv** (engl. k-edge-choosable) ako je G L-bridno obojiv kad svaka lista ima veličinu najmanje k.

Kromatski broj bridne liste u oznaci $\chi_l^{'}(G)$, je najmanji k takav da je G k-bridno izabirljiv.

Teorem 5.3 *Ako je $mad(G) < 3$, onda je G aciklički 6-izabirljiv.*

Dokaz. *Dovoljno je pokazati da se pretpostavke iz leme 3.5 kada je $mad(G) < 3$ mogu reducirati za postojanje acikličkog bojenja odabranog iz 6-uniformne liste L. Po definiciji vrijedi $mad(G - v) < 3$. Neka je ϕ acikličko L-bojenje od $(G - v)$. Slučajevi su prikazani na slici 5.1.*



Slika 5.1: Svođenje na acikličko 6-bojenje

Ako je $d_G(v) \leq 1$ onda proširujemo ϕ s bojom $\phi(v)$ koja nije korištena na susjedu od v.

Ako je $d_G(v) = 2$ i različite su boje na $N_G(v)$, onda za vrh v opet uzimamo boju koja nije korištena.

Ako je $d_G(v) = 2$ i iste su boje na oba vrha od $N_G(v)$, onda treba paziti na kontradikciju s 2-bojenjem ciklusa. S obzirom da v ima 5^--susjeda u, najviše četiri druge boje se pojavljuju na susjedima u, tako da postoji boja dostupna za vrh v. ■

Propozicija 5.4 *Bridovi težine najviše $k + 1$ su reducibilni za k-bridnu izabirljivost.*

Dokaz. *Lagani brid e (težine najviše k+1) je incidentan sa najviše $k - 1$*

bridova. Neka je ϕ L-bojenje bridova. Ako je $G - e$ k-bridno izabirljiv i $|L(e)| \geqslant k$, onda se ϕ od $G - e$ proširuje na bojenje bridova od G. ■

Lema 5.5 *Ciklusi parne duljine su 2-lisno izabirljivi.*

Dokaz. *Dokazat ćemo da je svaki C_{2t} L-obojiv kada je svaka lista veličine 2. Ako su liste jednake, odaberemo boje koje će se izmjenjivati. Inače, postoje susjedni vrhovi u i v takvi da $L(u)$ sadrži boju c koja nije u $L(v)$. Koristimo c na vrhu u i nastavljamo od u do v na putu $C_{2t} - u$. Na svakom novom vrhu odaberemo boju iz liste koja nije korištena na prethodnom vrhu. Takva boja uvijek postoji i vrijedi za svaki brid jer su boje odabrane za u i v različite.* ■

Metoda pražnjenja često se koristi za probleme bojenja ravninskih grafova.

Teorem 5.6 *Svaki ravninski graf koji nema 4-ciklus i j-stranu za $5 \leq j \leq 9$ je 3-obojiv.*

Dokaz. *Neka je graf G minimalni protuprimjer, on mora biti 4-kritičan* [2], *$\delta(G) = 3$ i on je 2-povezan. S obzirom da ne postoji 4-ciklus, ne postoje dvije 3-strane koje su susjedne. Po teoremu 4.8 možemo pretpostaviti da G sadrži barem jednu 10-stranu C čiji su svi vrhovi stupnja 3. Neka je f pravilno 3-bojenje od $G - V(C)$. S obzirom da svaki vrh na C ima točno jednog susjeda izvan C, dvije boje ostaju dostupne na svakom vrhu C. Parni ciklusi su 2-lisno izabirljivi, pa možemo dovršiti bojenje.* ■

Ravnomjerno punjenje se najčešće koristi kada grafovi i duali nisu triangulacije. Zanimljivost dokaza je korištenje "zaliha" naboja koji može ići od ili do vrhova ili strana. Zalihe olakšavaju pomicanje naboja iz vrhova maksimalnog stupnja do 3-vrha.

[2] Graf G je k-kritičan graf ako G nije $(k-1)$-obojiv, a svaki $H \subset G$ je $(k-1)$-obojiv.

Teorem 5.7 *Ako je G planaran graf i $\Delta(G) \geqslant 9$, onda je $\chi_l'(G) \leq \Delta(G)+1$.*

Dokaz. *Pretpostavimo suprotno, neka je G minimalan graf s bridnom listom L tako da je svaka lista veličine $\Delta(G)+1$ i G nema L-bojenje bridova. Po propoziciji 5.4 brid težine najviše $\Delta(G)+2$ je reducibilan. Pretpostavimo da je $\delta(G) \geqslant 3$ i da svaki susjed j-vrha ima stupanj najmanje $\Delta(G)+3-j$. Neka je $k = \Delta(G)$, s obzirom da je $k \geqslant 9$, zbroj stupnjeva bilo koja dva susjedna vrha je najmanje 12. Koristimo ravnomjerno punjenje s početnim nabojem jednakim $d(v)-4$ ili $l(f)-4$. U početku "zaliha" naboja je prazna. Pravila pražnjenja moraju usrećiti svaki vrh i stranu, a zalihe naboja držati nenegativnim kako bi dobili kontradikciju. Navedimo pravila pražnjenja:*

- *Svaki 3-vrh uzima naboj veličine 1 iz zaliha naboja, a svaki k-vrh daje naboj veličine $\frac{1}{2}$ u zalihe.*

- *Svaka 3-strana uzima naboj veličine $\frac{1}{2}$ od svakog incidentnog 8^+-vrha i $\frac{j-4}{j}$ od svakog incidentnog j-vrha gdje je $j \in \{5, 6, 7\}$.*

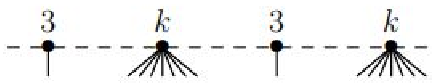
Kako bi dokazali da je u zalihama pozitivan naboj, dokazujemo $n_k > 2n_3$, gdje je n_j broj j-vrhova u grafu G. Bridovi incidentni s 3-vrhovima tvore bipartitni graf H čiji su elementi particije 3-vrhovi i k-vrhovi. Ako H ima ciklus C, onda je on parne duljine jer je H bipartitan. Zbog minimalnosti od G slijedi da $G-E(C)$ ima L-bojenje bridova. Svaki brid od C je incidentan s $\Delta(G)-1$ bridova koji su obojeni, pa ostaju najmanje 2 dostupne boje za svaki brid (slika 5.2). S obzirom da su ciklusi izomorfni svojim linijskim grafovima i po lemi 5.5 slijedi da su ciklusi 2-lisno izabirljivi, L-bojenje bridova se proširuje do G. Pretpostavimo da je H aciklički graf, tada on ima manje od n_3+n_k bridova. Također postoje $3n_3$ brida, pa imamo $3n_3 < n_3+n_k$ i dokazali smo da je $n_k > 2n_3$. Prvo pravilo pražnjenja 3-vrhove čini sretnima. Za $j \in \{4,5,6,7\}$ j-vrhovi gube ukupno najviše $j-4$ svog početnog naboja. 8-vrhovi gube naboj *veličine najviše 4, jer je $k \geqslant 9$. Za $j \geqslant 9$ j-vrhovi su sretni i eventualno daju $\frac{1}{2}$ naboja zalihama, a gube najviše $\frac{j+1}{2}$.*

Promotrimo sada strane. 4^+-strane ne gube naboj i ostaju sretne. Moramo pokazati da svaka 3-strana prima naboj najmanje 1. Neka je j najmanji stupanj među svim vrhovima koji su incidentni sa stranom f. Ako je $j \leq 4$, prema drugom pravilu pražnjenja svaki od dva incidentna 8^+-vrha daje $\frac{1}{2}$ naboja.

Ako je $j = 5$ onda svaki od dva incidentna 7^+-vrha daje najmanje $\frac{3}{7}$ i $\frac{1}{5}$ za 5-vrh.

Ako je $j \geqslant 6$ onda svaki vrh incidentan sa stranom f daje najmanje $\frac{1}{3}$ za f.

Zaključujemo da 3-strana uvijek prima naboj najmanje 1. ■



Slika 5.2: Isključeni ciklusi u teoremu 5.7

Literatura

[1] Borodin, Oleg V. "Colorings of plane graphs: A survey." Discrete Mathematics 313.4 (2013): 517-539.

[2] Cranston, Daniel W., and Douglas B. West. "An introduction to the discharging method via graph coloring." Discrete Mathematics 340.4 (2017): 766-793.

[3] Cranston, Daniel W., and Douglas B. West. "A Guide to the Discharging Method"
https://faculty.math.illinois.edu/ west/pubs/discharg.pdf

[4] Discharging method (discrete mathematics), Wikipedia.
https://en.wikipedia.org/wiki/Discharging_method_(discrete_mathematics)

[5] Golemac, Anka. Teorija grafova, nastava 2021./22.

[6] Hliněný, Petr. Discharging Technicque in Practice (short lecture notes), 2000.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

METODA PRAŽNJENJA

Ante Čondić

Sažetak:

Cilj ovog rada bio je objasniti primjenu metode pražnjenja koja ima važnu ulogu u teoriji grafova i korištena je u slavnom dokazu teorema o četiri boje. Metoda se provodi kroz dva koraka, dodjeljivanje naboja vrhovima, bridovima ili stranama grafa te premještanje tih naboja po određenom skupu pravila. Kroz razne primjere u planarnim grafovima i bojenjima smo pokazali kako navedena metoda funkcionira.

Ključne riječi:

graf, teorija grafova, bojenje grafova, planarni grafovi

Podatci o radu:

32 stranice, 11 slika, 6 literaturnih navoda, hrvatski jezik

Mentorica: *doc. dr. sc. Tanja Vojković*

Članovi povjerenstva:

dr. sc. Ana Laštre, pred.

dr. sc. Ivan Jelić

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *10. veljače 2023.*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

Discharging method

Ante Čondić

Abstract:

The aim of this work was to explain the application of discharging method, which has an important role in graph theory and was used in the famous proof of the four color theorem. The method is implemented through two steps, assigning charges to the vertices, edges or faces of the graph and moving these charges according to a certain set of rules. Through various examples in planar graphs and colorings, we have shown how the specified method works.

Key words:

graph, graph theory, graph coloring, planar graphs

Specifications:

32 pages, 11 pictures, 15 literature citations, croatian language

Mentor: *doc. dr. sc. Tanja Vojković*

Committee:

dr. sc. Ana Laštre, pred.

dr. sc. Ivan Jelić

This thesis was approved by a Thesis commettee on *February 10, 2023.*