O dimenziji topološkog prostora

Olivari, Luca

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

LUCA OLIVARI

O DIMENZIJI TOPOLOŠKOG PROSTORA

DIPLOMSKI RAD

Split, srpanj 2017.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

O DIMENZIJI TOPOLOŠKOG PROSTORA

DIPLOMSKI RAD

Student(ica):

Luca Olivari

Mentor(ica):
prof. dr. sc. Vlasta Matijević

Split, srpanj 2017.

Uvod

Teorija dimenzije je grana topologije koja se bavi definiranjem i proučavanjem pojma dimenzije u različitim klasama topoloških prostora. U ovom radu definirat ćemo i proučavati malu induktivnu dimenziju ind, veliku induktivnu dimenziju Ind i dimenziju pokrivanja dim. O egzaktnoj definiciji dimenzije prostora matematičari su počeli razmišljati početkom prošlog stoljeća. Prve radove o dimenziji napisali su 1911. i 1912. godine Brouwer, Lebesgue i Poincaré. Odlučujući korak k definiranju dimenzije učinio je Poincaré 1903. godine, kada je uočio da je pojam dimenzije vezan uz pojam separacije i da se može definirati induktivno. On je privukao pozornost na jednostavnu činjenicu da se tijela mogu separirati plohama, plohe pravcima, i pravci točkama. Međutim, Poincaré nije uspio svoje važne ideje precizno definirati prije svoje smrti 1912. godine. Brouwer, u svom radu 1913. godine, u svrhu dokazivanja da euklidski prostori $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ nisu homeomorfni, kad god je $m \neq n$, koristi svoju definiciju dimenzije. Danas, Browerova definicija dimenzije podudara se s definicijom velike induktivne dimenzije u klasi lokalno povezanih potpuno metrizabilnih prostora. Sustavna teorija dimenzije počela se razvijati ranih dvadesetih godina, i intenzivno nastavila svoj razvoj kroz sljedećih petnaestak godina. U tom periodu, uglavnom se proučavao pojam dimenzije u klasi separabilih metrizabilnih prostora. Definiciju male induktivne dimenzije formulirao je, 1922. godine, Urysohn, a nedugo zatim, i Menger, 1923. godine. U svojim radovima bavili su se proučavanjem male induktivne dimenzije u klasi kompaktnih metrizabilnih prostora. Za poopćenje teorije na klasu separabilnih metrizabilnih prostora zaslužni su Hurewicz i Tumarkin. Veliku induktivnu dimenziju definirao je Čech 1931. godine. Čech je, također, definirao i dimenziju pokrivanja 1933. godine. Iako različito definirane, mala induktivna dimenzija, velika induktivna dimenzija i dimenzija pokrivanja podudaraju se u klasi separabilnih metrizabilnih prostora. Jednakost velike induktivne dimenzije i dimenzije pokrivanja u klasi separabilnih metrizabilnih prostora dokazao je Hurewicz, dok su jednakost male induktivne dimenzije i velike induktivne dimenzije u klasi kompaktnih metrizabilnih prostora dokazali Menger, 1924. godine, i Urysohn, 1926. godine. Jednakost male induktivne dimenzije i velike induktivne dimenzije u klasi separabilnih metrizabilnih prostora dokazali su Tumarkin, 1926. godine, i Hurewicz, 1927. godine. Novi početak teorija dimenzije imala je pedesetih godina prošlog stoljeća, kada je otkriveno da se mnogi rezultati dokazani za separabilne metrizabilne prostore mogu proširiti na općenitije klase prostora. U klasi metrizabilnih prostora podudaraju se velika induktivna dimenzija i dimenzija pokrivanja. Ovaj rezultat dokazali su, neovisno jedan o drugom, Katětov 1952. i Morita 1954. godine.

Dimenzija topološkog prostora je generalizacija dimenzije euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$, pa je logično za očekivati da je mala induktivna dimenzija, velika induktivna dimenzija i dimenzija pokrivanja euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ jednaka n. Jednakosti $\dim\mathbb{R}^n = n$ i $\mathrm{Ind}\mathbb{R}^n = n$ dokazao je Brouwer, a jednakost $\mathrm{ind}\mathbb{R}^n = n$ dokazali su Menger, 1924. godine, i Urysohn, 1925. godine.

Sam diplomski rad podijeljen je u pet poglavlja. U prvom poglavlju definiramo malu induktivnu dimenziju i detaljno proučavamo njena svojstva. U prvom odjeljku navodimo i dokazujemo osnovna svojstva male induktive dimenzije. Posebno dokazujemo monotonost male induktivne dimenzije (Teorem 1.6), te da je mala induktivna dimenzija topološka invarijanta u klasi regularnih prostora (Teorem 1.4). U drugom odjeljku proučavamo 0-dimenzionalne prostore. U posljednjem odjeljku navodimo i dokazujemo neke važne teoreme o maloj induktivnoj dimenziji u klasi separabilnih metrizabilnih prostora, kao što su Teorem sume (Teorem 1.32), Teoremi dekompozicije (Teorem 1.33 i Teorem 1.34), Teorem o produktu (Teorem 1.40), te Teoremi separacije (Teorem 1.37 i Teorem 1.38). U drugom poglavlju definiramo veliku induktivnu dimenziju i proučavmo njena osnovna svojstva. Posebno dokazujemo da je velika induktivna dimenzija topološka invarijanta u klasi normalnih prostora (Teorem 2.3). U trećem poglavlju bavimo se dimenzijom pokrivanja. U prvom odjeljku proučavamo osnovna svojstva dimenzije pokrivanja, te dokazujemo da je dimenzija pokrivanja topološka invarijanta u klasi normalnih prostora (Teorem 3.4). U drugom odjeljku dokazujemo Teorem sume za dimenziju pokrivanja (Teorem 3.22). U trećem odjeljku proučavamo dimenziju pokrivanja u klasi kompaktnih metrizabilnih prostora. U četvrtom poglavlju bavimo se relacijama između prethodno definiranih dimenzija, te dokazujemo Teorem kompaktifikacije (Teorem 4.16). Posebno dokazujemo jednakost svih triju dimenzija u klasi separabilnih metrizabilnih prostora (Teorem 4.21), te jednakost velike induktivne dimenzije i dimenzije pokrivanja u klasi metrizabilnih prostora (Teorem 4.28). U posljednjem poglavlju dokazujemo da je dimenzija euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ jednaka n, bilo da se radi o velikoj ili maloj induktivnoj dimenziji, ili dimenziji pokrivanja (Teorem 5.5).

Napominjemo da su posljednih desetljeća definirane nove dimenzije za različite klase topoloških prostora poput kohomološke dimenzije, dimenzije proširenja i asimptotske dimenzije. Time teorija dimenzije ostaje i dalje vrlo propulzivna topološka grana.

Sadržaj

Poglavlje 1

Mala induktivna dimenzija

1.1 Definicija i osnovna svojstva

U ovom poglavlju ćemo uvesti pojam male induktivne dimenzije i pokazati neka osnovna svojstva. Najprije ćemo dokazati da je mala induktivna dimenzija topološka invarijanta, te da je definicija usklađena s relacijom "biti potprostor", tj. da je mala induktivna dimenzija potprostora uvijek manja ili jednaka maloj induktivnoj dimenziji prostora. Naposljetku uvodimo pojam separatora i pokazujemo na koji je način povezan s pojmom male induktivne dimenzije.

Pojam male induktivne dimenzije definira se za regularne (ili T_3) prostore. Za topološki prostor X kažemo da je regularan ili T_3 prostor ako je X T_1 prostor i svaka točka $x \in X$ i zatvoren skup $A \subseteq X$ takav da $x \notin A$ imaju diskjunktne okoline. Za topološki prostor X kažemo da je T_1 prostor ako za svaki par različitih točaka $x, y \in X$ svaka od njih ima okolinu koja ne sadrži onu drugu točku.

Definicija 1.1 *Neka je X regularan prostor. Mala induktivna dimenzija (ili Menger-Urysohnova dimenzija) od X, u oznaci $indX$, je element skupa*

$\{-1, 0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *takav da vrijedi:*

(MU1) $indX = -1$, *ako i samo ako je* $X = \emptyset$

(MU2) $indX \leq n$, *za* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *ako, za svaku točku* $x \in X$ *i svaku okolinu* $V \subseteq X$ *točke* x, *postoji otvoren skup* $U \subseteq X$ *takav da je*

$$x \in U \subseteq V \text{ i } indFrU \leq n-1,$$

(MU3) $indX = n$, *ako je* $indX \leq n$ *i* $indX > n-1$, *tj. ne vrijedi* $indX \leq n-1$,

(MU4) $indX = \infty$, *ako je* $indX > n$, *za svaki* $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$.

Primjer 1.2 *(i) Neka je* X *neprazan diskretan topološki prostor, tj. neka je svaki podskup* $U \subseteq X$ *otvoren u* X. *Tada je* $indX = 0$. *Naime, za svaku točku* $x \in X$ *i proizvoljnu okolinu* $V \subseteq X$ *od* x, $\{x\}$ *je otvoren podskup od* X *za koji vrijedi* $x \in \{x\} \subseteq V$ *i* $indFr\{x\} = ind(Cl\{x\} \setminus Int\{x\}) = ind\emptyset = -1$.

(ii) Vrijedi $ind\mathbb{R} \leq 1$, *gdje je* $\mathbb{R}$ *euklidski prostor. Doista, neka je* $x \in \mathbb{R}$ *proizvoljna točka i* $V \subseteq \mathbb{R}$ *proizvoljna okolina od* x. *Tada postoji otvoren podskup* U *od* $\mathbb{R}$ *takav da je* $x \in U \subseteq V$ *i* $FrU = \{y, z\}$, *gdje su* $y, z \in \mathbb{R}$. *Potprostor* FrU *euklidskog prostora* $\mathbb{R}$ *ima diskretnu topologiju, pa je , po (i)* $indFrU = 0$. *Dakle,* $ind\mathbb{R} \leq 1$.

(iii) Vrijedi $indS^1 \leq 1$, *gdje je* S^1 *jedinična kružnica u euklidskom prostoru* $\mathbb{R}^2$. *Kao i u (ii), za svaku točku* $x \in S^1$, *i proizvoljnu okolinu* $V \subseteq S^1$ *od* x, *postoji otvoren podskup* U *od* S^1 *takav da je* $x \in U \subseteq V$ *i* $FrU = \{y, z\}$, *gdje su* $y, z \in S^1$. *Odavde slijedi* $indS^1 \leq 1$.

Pretpostavljamo da za svaki cijeli broj n vrijedi $n < \infty, n + \infty = \infty + n = \infty + \infty = \infty$

Lema 1.3 *Neka su X i Y homeomorfni regularni prostori i neka je $indX \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. Tada je $indY \leq indX$.*

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po $n = indX \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. Pretpostavimo da je $indX = -1$. Tada je $X = \emptyset$, a kako je Y homeomorfan X, to je $Y = \emptyset$ pa je $indY = -1$.

Pretpostavimo da tvrdnja leme vrijedi za svaki regularan prostor male induktivne dimenzije strogo manje od $n \geq 0$ i neka je $indX = n$. Dokažimo da je $indY \leq n$. Neka je $f : X \to Y$ homeomorfizam , $y \in Y$ proizvoljna točka u Y i $V \subseteq Y$ po volji odabrana okolina od y. Tada je $f^{-1}(V) \subseteq X$ okolina od $f^{-1}(y)$. Kako je $indX = n$, to postoji otvoren skup $W \subseteq X$ takav da

$$f^{-1}(y) \in W \subseteq f^{-1}(V) \text{ i } indFrW \leq n - 1.$$

Sada je $U := f(W) \subseteq Y$ otvoren podskup od Y za koji vrijedi $y \in U = f(W) \subseteq f(f^{-1}(V)) = V$. Kako je $f_{\big|FrW} : FrW \to FrU$ homeomorfizam i $indFrW \leq n - 1$, po pretpostavci indukcije je $indFrU \leq n - 1$. Dakle, $indY \leq n = indX$. ■

Teorem 1.4 *Mala induktivna dimenzija je topološka invarijanta u klasi regularnih prostora.*

Dokaz. Neka su X i Y homeomorfni regularni prostori. Ako je $indX \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$, onda je po prethodnoj lemi $indY \leq indX$. Sada je očito $indY \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$, pa je, po prethodnoj lemi, $indX \leq indY$, odnosno $indX = indY$.

Pretpostavimo sada da je $indX = \infty$ i dokažimo da je $indY = \infty$. Kada bi vrijedilo $indY = n < \infty$, onda bi, po prethodno dokazanom, slijedilo $indX = indY = n$. Dakle, $indY = \infty = indX$. ■

Svaki potprostor regularnog prostora je regularan prostor, pa ima smisla promatrati malu induktivnu dimenziju za potprostore regularnog prostora.

Napomena 1.5 *Neka je M potprostor topološkog prostora X i $U \subseteq M$ otvoreni podskup od M. Tada, po definiciji potprostorne topologije, postoji otvoreni skup $U_1 \subseteq X$ takav da je $U = M \cap U_1$. Za granicu skupa U u prostoru M vrijedi:*

$Fr_M U = Cl_M U \cap Cl_M (M \setminus U) = (ClU \cap M) \cap [Cl(M \setminus U) \cap M] =$

$= ClU \cap Cl(M \setminus U_1) \cap M \subseteq ClU_1 \cap Cl(X \setminus U_1) \cap X =$

$ClU_1 \cap Cl(X \setminus U_1) = FrU_1$

Teorem 1.6 (Teorem o potprostoru) *Za svaki potprostor M regularnog prostora X vrijedi $indM \leq indX$.*

Dokaz. Neka je $M \subseteq X$ potprostor regularnog prostora X. Pretpostavimo da je $indX = \infty$. Tada je očito $indM \leq indX$.

Pretpostavimo da je $indX = n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. U ovom slučaju dokaz provodimo indukcijom po $n = indX$.

Neka je $indX = -1$. Tada je $X = \emptyset$, pa je i $M = \emptyset$, odnosno $indM = -1 \leq indX$.

Pretpostavimo da tvrdnja teorema vrijedi za svaki prostor male induktivne dimenzije strogo manje od $n \geq 0$ i neka je $indX = n$. Neka je $M \subseteq X$ potprostor od X, $x \in M$ proizvoljna točka i $V \subseteq M$ po volji odabrana okolina točke x u M. Tada postoji okolina $V_1 \subseteq X$ točke x u X takva da je $V = M \cap V_1$. Kako je $indX = n$, to postoji otvoren podskup $U_1 \subseteq X$ od X takav da je $x \in U_1 \subseteq V_1$ i $indFrU_1 \leq n - 1$. Sada, za otvoreni podskup $U := M \cap U_1$ od M, vrijedi $x \in U = M \cap U_1 \subseteq M \cap V_1 = V$. Po prethodnoj napomeni je $Fr_M U \subseteq FrU_1$. Kako je $indFrU_1 \leq n-1$, to je, po pretpostavci indukcije, $indFr_M U \leq indFrU_1 \leq n - 1$. Dakle, $indM \leq n = indX$. ■

Primjer 1.7 *(i) Vrijedi $indS^n \leq n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, gdje je S^n jedinična sfera u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$. Tvrdnju smo dokazali za $n = 1$*

u Primjeru 1.2. Pretpostavimo da vrijedi $indS^k \leq k$*, za svaki* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$*,*$n > 1$*. Za svaku točku* $x \in S^n$ *i svaku okolinu* $V \subseteq S^n$ *točke* x*, postoji otvoren skup* $U \subseteq S^n$*, takav da je* $x \in U \subseteq V$ *i* FrU *homeomorfan* S^{n-1}*. Po pretpostavci, vrijedi* $indS^{n-1} \leq n-1$*. Po Teoremu 1.4, vrijedi* $indFrU = indS^{n-1} \leq n-1$*. Dakle,* $indS^n \leq n$*.*

(ii) Vrijedi $ind\mathbb{R}^n \leq n$*, za svaki* $n \in \mathbb{N}$*, gdje je* $\mathbb{R}^n$ *euklidski prostor. Za svaku točku* $x \in \mathbb{R}^n$ *i svaku okolinu* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *točke* x*, postoji otvoren podskup* U *prostora* $\mathbb{R}^n$*, takav da je* $x \in U \subseteq V$ *i* FrU *homeomorfan* S^{n-1}*. Po (i) vrijedi* $indS^{n-1} \leq n-1$*. Po Teoremu 1.4, vrijedi* $indFrU = indS^{n-1} \leq n-1$*. Dakle,* $ind\mathbb{R}^n \leq n$*, za svaki* $n \in \mathbb{N}$*.*

Ako je $indX = n$, prirodno se nameće pitanje da li postoje potprostori od X dimenzije k za neki $k \leq n$. Takvi potprostori postoje, i štoviše, za svaki $0 \leq k \leq n$, postoji zatvoren potprostor $M \subseteq X$ takav da je $indM = k$. O tome govori sljedeći teorem:

Teorem 1.8 *Neka je* X *regularan prostor i* $indX = n \in \mathbb{N}$*. Tada, za svaki* $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$*, postoji zatvoren potprostor* $M_k \subseteq X$ *od* X *takav da je* $indM_k = k$*.*

Dokaz. Primjetimo da je dovoljno pokazati da postoji zatvoren potprostor $M \subseteq X$ takav da je $indM = n-1$.

Kako je $indX > n-1$, to postoji točka $x \in X$ i okolina $V \subseteq X$ točke x takva da, za svaki otvoreni skup $U \subseteq X$ takav da je $x \in U \subseteq V$, vrijedi $indFrU > n-2$. S druge strane, jer je $indX \leq n$, to postoji otvoren skup $W \subseteq X$ takav da je $x \in W \subseteq V$ i $indFrW \leq n-1$. Odavde slijedi $n-1 \geq indFrW > n-2$, pa je $indFrW = n-1$. Sada, za zatvoreni skup $M := FrW$, vrijedi $indM = n-1$. ■

Napomena 1.9 *Neka je $U \subseteq X$ podskup topološkog prostora X. Ako za otvoreni skup $V \subseteq X$ vrijedi $V \cap ClU \neq \emptyset$, onda je $V \cap U \neq \emptyset$. Doista, pretpostavimo da postoji $x \in V \cap ClU$. Tada je V otvorena okolina točke $x \in ClU$, pa, po karakterizaciji zatvorenja, vrijedi $V \cap U \neq \emptyset$.*

Sada ćemo uvesti pojam separatora skupova i pokazati kako pomoću tog pojma možemo karakterizirati nejednakost $indX \leq n \geq 0$.

Definicija 1.10 *Neka je X topološki prostor i $A, B \subseteq X$ par disjunktnih podskupova od X. Za skup $L \subseteq X$ kažemo da je separator skupova A i B (ili da separira A i B) ako postoje otvoreni podskupovi $U, W \subseteq X$ prostora X takvi da vrijedi:*

$$A \subseteq U,\ B \subseteq W,\ U \cap W = \emptyset \text{ i } X \setminus L = U \cup W$$

Napomena 1.11 *Neka je $L \subseteq X$ separator skupova $A, B \subseteq X$. Tada je L zatvoren podskup od X.*

Ako je $A = \{x\}$ za neki $x \in X \setminus B$, onda kažemo da je L separator točke x i skupa B. Ako je uz to i $B = \{y\}$ za neki $y \in X \setminus \{x\}$, onda kažemo da je L separator točaka x i y.

Nadalje, ako su $U, W \subseteq X$ otvoreni skupovi u X takvi da je

$$A \subseteq U,\ B \subseteq W,\ U \cap W = \emptyset \text{ i } X \setminus L = U \cup W,$$

onda je $FrU, FrW \subseteq L$. Naime, kako je $FrU = ClU \setminus IntU = ClU \setminus U$, to je $FrU \cap U = \emptyset$. Nadalje, kako je $FrU \subseteq ClU$ i $U \cap W = \emptyset$, to je, po Napomeni 1.9, $\emptyset = W \cap ClU \supset W \cap FrU$. Odavde slijedi da je $FrU \cap (U \cup W) = \emptyset$, tj. $FrU \subseteq L$. Slično se pokaže $FrW \subseteq L$.

Prisjetimo se da za topološki prostor X kažemo da je normalan (ili T_4) prostor, ako je X T_1 prostor i ako svaki par disjunktnih zatvorenih podskupova

$A, B \subseteq X$ ima par disjunktnih okolina. Primjetimo da je uvjet normalnosti ekvivalentan tome da za svaki par disjunktnih zatvorenih podskupova $A, B \subseteq X$ postoji separator L skupova A i B. Nadalje, za T_1 prostor X su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) X je normalan prostor.

(ii) Za svaki zatvoren skup $A \subseteq X$ i svaki otvoren skup $U \subseteq X$ takav da $A \subseteq U$, postoji otvoren skup $V \subseteq X$ tako da je $A \subseteq V \subseteq ClV \subseteq U$.

(iii) Za svaki par disjunktnih zatvorenih skupova $A, B \subseteq X$, postoje okoline U i V od A i B redom tako da je $ClU \cap ClV = \emptyset$.

Jedna od karakterizacija regularnih prostora u klasi T_1 prostora je:

Teorem 1.12 *Neka je X T_1 prostor. X je regularan ako i samo ako za svaku točku $x \in X$ i svaku okolinu $U \subseteq X$ točke x postoji okolina $V \subseteq X$ od x takva da je $x \in V \subseteq ClV \subseteq U$.*

Ovu karakterizaciju ćemo koristiti u dokazu sljedeće propozicije:

Propozicija 1.13 *Neka je X regularan prostor i $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tada je $indX \leq n$ ako i samo ako, za svaku točku $x \in X$ i svaki zatvoreni podskup $B \subseteq X$ takav da $x \notin B$, postoji separator L točke x i skupa B takav da $indL \leq n - 1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $indX \leq n$. Neka je $x \in X$ po volji odabrana točka i $B \subseteq X$ proizvoljan zatvoren podskup od X takav da $x \notin B$. Tada je $X \setminus B$ otvorena okolina točke x u X pa, po prethodnom teoremu, postoji okolina V točke x takva da je $x \in V \subseteq ClV \subseteq X \setminus B$. Kako je $indX \leq n \geq 0$, to postoji otvoren skup $U \subseteq X$ u X takav da je $x \in U \subseteq V$ i $indFrU \leq n-1$.

Stavimo $L := FrU$. Tada je $indL \leq n-1$ i L je separator točke x i skupa B. Naime, za otvorene skupove

$$W := X \setminus ClU \subseteq X \text{ i } U \subseteq X$$

vrijedi $x \in U, U \cap W = \emptyset$ i $X \setminus L = X \setminus FrU = X \setminus [ClU \cap Cl(X \setminus U)] = (X \setminus ClU) \cup [X \setminus (Cl(X \setminus U))] = W \cup Int(U) = W \cup U$.
Nadalje, kako je $ClV \subseteq X \setminus B$, to je $B \subseteq X \setminus ClV \subseteq X \setminus ClU = W$.

Obratno, pretpostavimo da, za svaku točku $x \in X$ i svaki zatvoreni podskup $B \subseteq X$ takav da $x \notin B$, postoji separator L točke x i skupa B takav da je $indL \leq n-1$. Dokažimo da je $indX \leq n$. Neka je $x \in X$ proizvoljna točka i $V \subseteq X$ po volji odabrana okolina od x. Neka je L separator točke x i zatvorenog skupa $B := X \setminus IntV$ takav da je $indL \leq n-1$. Nadalje, neka su $U, W \subseteq X$ otvoreni podskupovi od X takvi da je $x \in U$, $B \subseteq W$, $U \cap W = \emptyset$ i $X \setminus L = U \cup W$. Vrijedi $x \in U \subseteq X \setminus W \subseteq X \setminus B = IntV \subseteq V$ i $FrU = Cl(X \setminus U) \cap ClU \subseteq (X \setminus IntU) \cap Cl(X \setminus W) = (X \setminus U) \cap (X \setminus W) = X \setminus (W \cup U) = L$. Iz Teorema o potprostoru slijedi $indFrU \leq indL \leq n-1$, pa je $indX \leq n$. ■
Baza topološkog prostora u potpunosti određuje otvorene skupove u topološkom prostoru pa se lako vidi da vrijedi karakterizacija:

Teorem 1.14 *Neka je X regularan prostor i $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tada je $indX \leq n$ ako i samo ako X ima bazu $\mathcal{B}$ takvu da je $indFrU \leq n-1$ za svaki, $U \in \mathcal{B}$.*

Dokaz. Ako je $indX \leq n$, onda, za svaku točku $x \in X$ i svaku okolinu $V \subseteq X$ od x, postoji otvoreni skup $U_V^x \subseteq X$ takav da je $x \in U_V^x \subseteq V$ i $indFrU_V^x \leq n-1$. Definirajmo $\mathcal{B}(x) := \{U_V^x : V \subseteq X \text{ je okolina točke } x\}$. Očito je $\mathcal{B}$ lokalna baza u točki x. Stavimo $\mathcal{B} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$. Tada je $\mathcal{B}$ baza za X, jer, za svaki otvoreni skup $W \subseteq X$ i za svaku točku $x \in X$ takvu da je

$x \in W$, postoji $U_W^x \in \mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{B}$ takav da je $x \in U_W^x \subseteq W$. Također, vrijedi $indFrU \leq n-1$, za svaki $U \in \mathcal{B}$.

Obratno, ako X ima bazu $\mathcal{B}$ takvu da je $indFrU \leq n-1$, za svaki $U \in \mathcal{B}$, onda očito vrijedi $(MU2)$, odnosno $indX \leq n$. ∎

Prisjetimo se da za topološki prostor X kažemo da je separabilan ako X ima prebrojiv podskup gust na X, tj. ako postoji prebrojiv podskup $D \subseteq X$ takav da je $ClD = X$.
Za metrizabilne prostore posebno vrijedi sljedeća karakterizacija separabilnosti.

Neka je X metrizabilan prostor. X je separabilan ako i samo ako je 2-prebrojiv, tj. ako postoji prebrojiva baza topologije na X.
Za separabilne metrizabilne prostore vrijedi jača tvrdnja nego u prethodnom teoremu:

Teorem 1.15 *Neka je X separabilan metrizabilan prostor i $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tada je $indX \leq n$ ako i samo ako X ima prebrojivu bazu $\mathcal{B}$ takvu da je $indFrU \leq n-1$, za svaki $U \in \mathcal{B}$.*

Dokaz ovog teorema slijedi iz činjenice da svaku bazu 2-prebrojivog prostora možemo "reducirati" na prebrojivu bazu. Naime vrijedi:

Lema 1.16 *Neka je X 2-prebrojiv prostor. Tada za svaku bazu $\mathcal{B}$ od X postoji prebrojiva podmnožina $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ od $\mathcal{B}$ koja je također baza od X.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{D} = \{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva baza od X. Za svaki $i, j \in \mathbb{N}$ neka je $\mathcal{B}_{i,j} = \{U \in \mathcal{B} : V_i \subseteq U \subseteq V_j\}$.
Za svaki $i, j \in \mathbb{N}$, za koje je $\mathcal{B}_{i,j} \neq \emptyset$, izaberimo proizvoljni $U_{i,j} \in \mathcal{B}_{i,j}$ i stavimo $\mathcal{B}_0 := \{U_{i,j} : (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathcal{B}_{i,j} \neq \emptyset\}$. $\mathcal{B}_0$ je baza od X. Naime, za proizvoljan otvoren skup $W \subseteq X$ i $x \in W$ proizvoljan, postoji $j \in \mathbb{N}$ takav

da $x \in V_j \subseteq W$, jer je $\mathcal{D}$ baza od X. Kako je $\mathcal{B}$ baza od X, postoji $U \in \mathcal{B}$ takav da $x \in U \subseteq V_j \subseteq W$. Sada, jer je $\mathcal{D}$ baza od X, postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in V_i \subseteq U \subseteq V_j \subseteq A$. Po definiciji od $\mathcal{B}_{i,j}$, vrijedi $U \in \mathcal{B}_{i,j}$, pa je $\mathcal{B}_{i,j} \neq \emptyset$. Sada, za $U_{i,j} \in \mathcal{B}_0$, vrijedi $x \in U_{i,j} \subseteq V_j \subseteq W$, pa je $\mathcal{B}_0$ baza topologije na X i očito je $\mathcal{B}_0$ prebrojiv skup. ■

Dokaz teorema 1.15. Ako je $indX \leq n$ onda, po Teoremu 1.14, postoji baza $\mathcal{B}$ takva da $FrU \leq n-1$, za svaki $U \in \mathcal{B}$. Po prethodnoj lemi, postoji prebrojiva podmnožina $\mathcal{B}_0$ od $\mathcal{B}$ koja je također baza metričkog prostora X.

Obratno, ako X ima prebrojivu bazu $\mathcal{B}$ takvu da je $FrU \leq n-1$, za svaki $U \in \mathcal{B}$, onda je, po Teoremu 1.14, $indX \leq n$. ■

1.2 0-dimenzionalan prostor

U ovom odjeljku uvest ćemo pojam 0-dimenzionalnog prostora, te navesti i dokazati neke važne teoreme o maloj induktivnoj dimenziji u posebanom slučaju 0-dimenzionalnog prostora. Svi teoremi dokazani u ovom odjeljku poslužit će da dokažemo odgovarajuće teoreme o maloj induktivnoj dimenziji u punoj općenitosti u sljedećem odjeljku.

Definicija 1.17 *Neka je X regularan prostor. Kažemo da je X $0-$dimenzionalan prostor, ako je $indX = 0$.*

Primjer 1.18 *Neka je X neparazn potprostor euklidskog prostora $\mathbb{R}$. Prostor X je 0-dimenzionalan ako i samo ako X ne sadrži niti jedan interval. Doista, budući da je svaki potprostor $\langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, euklidskog prostora $\mathbb{R}$, homeomorfan $\mathbb{R}$, to je $ind\langle a, b\rangle = 1$. Iz Teorema o potprostoru zaključujemo da 0-dimenzionalan prostor X ne može sadržavati niti jedan interval.*

Obratno, pretpostavimo da X ne sadrži niti jedan interval. Neka je $x \in X$ proizvoljna točka i $V \subseteq X$ proizvoljna okolina točke x u X. Tada postoji okolina U točke x u $\mathbb{R}$, takva da je $U \cap X = V$. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, takvi da je $a < b$ i vrijedi $x \in \langle a, b\rangle \subseteq U$. Kako X ne sadrži niti jedan interval, to postoje $c \in \langle a, x\rangle \setminus X$ i $d \in \langle x, b\rangle \setminus X$. Definirajmo skup $W := \langle c, d\rangle \cap X$. Skup W je, očito, otvoren u X. Nadalje, kako vrijedi $c, d \notin X$, to je $W = [c, d] \cap X$. Dakle, W je otvoreno-zatvoren u X, pa je $Fr_X W = Cl_X W \setminus Int_X W = \emptyset$. Prema tome, vrijedi $indFrW = -1$, pa je $indX \leq 0$. Budući da je $X \neq \emptyset$, zaključujemo da je $indX = 0$.

Primjer 1.19 *Neka je X metrizabilan prostor. Ako je $0 < \mathbf{card}X < \mathfrak{c}$, onda je $indX = 0$. Doista, neka je d metrika koja metrizira topologiju na X. Za svaku točku $x \in X$ i svaku okolinu V točke x u X, postoji $\epsilon > 0$ takav da je $B(x, \epsilon) \subseteq V$. Kako je $\mathbf{card}X < \mathfrak{c}$, to postoji $\delta > 0$ takav da je $\delta < \epsilon$ i $d(x, y) \neq \delta$, za svaki $y \in X$. Odavde slijedi da je $FrB(x, \delta) \subseteq \{y \in X : d(x, y) = \delta\} = \emptyset$. Dakle, vrijedi $x \in B(x, \delta) \subseteq B(x, \epsilon) \subseteq V$ i $indFrB(x, \delta) = -1$, pa je $indX \leq 0$. Budući da je $\mathbf{card}X > 0$, to je $X \neq \emptyset$, pa je $indX = 0$.*

Lema 1.20 *Neka je X $0-$dimenzionalan prostor i $A, B \subseteq X$ par disjunktnih zatvorenih podskupova od X. Tada, za svaku točku $x \in X$, postoji otvoreno-zatvoren skup $W_x \subseteq X$ takav da je $x \in W_x$ i $A \cap W_x = \emptyset$ ili $B \cap W_x = \emptyset$.*

Dokaz. Neka je $x \in X$ proizvoljna točka. Ako je $x \in A$, onda je $X \setminus B$ otvorena okolina od x. Kako je $indX = 0$, postoji otvoren skup $W_x \subseteq X$ takav da $x \in W_x \subseteq X \setminus B$ i $indFrW_x \leq -1$. Dakle, $indFrW_x = -1$, pa je $\emptyset = FrW_x = ClW_x \setminus IntW_x = ClW_x \setminus W_x$, tj. $ClW_x = W_x$. Dakle, W_x je zatvoreno-otvoren skup takav da $x \in W_x$ i $B \cap W_x = \emptyset$.

Ako $x \notin A$, onda je $X \setminus A$ otvorena okolina od x, pa analogno postoji otvoreno-zatvoren skup $W_x \subseteq X$ takav da $x \in W_x$ i $A \cap W_x = \emptyset$. ■

Teorem 1.21 (Prvi teorem separacije za dimenziju 0) *Neka je X 0−dimenzionalan separabilan metrički prostor. Tada prazan skup separira svaki par disjunktnih zatvorenih podskupova $A, B \subseteq X$, tj. postoji otvoreno-zatvoren skup $U \subseteq X$ takav da $A \subseteq U$ i $B \subseteq X \setminus U$.*

Dokaz. Po prethodnoj lemi, za svaki $x \in X$ postoji otvoreno-zatvoren skup $W_x \subseteq X$ takav da je $x \in W_x$ i

$$A \cap W_x = \emptyset \text{ ili } B \cap W_x = \emptyset.$$

$(W_x, x \in X)$ je otvoren pokrivač prostora X. Svaki otvoren pokrivač u 2-prebrojivom prostoru ima prebrojivi potpokrivač, pa ,kako je X separabilan metrički prostor, to postoji prebrojiv potpokrivač $(W_{x_i}, i \in \mathbb{N})$ od $(W_x, x \in X)$. Za svaki $i \in \mathbb{N}$ definirajmo

$$U_i := W_{x_i} \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} W_{x_j} \subseteq W_{x_i}.$$

Skup $\bigcup\limits_{j=0}^{i-1} W_{x_j}$ je zatvoren, kao konačna unija zatvorenih skupova, pa je $U_i \subseteq X$ otvoren skup u X, kao razlika otvorenog i zatvorenog skupa, za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Familija $(Ui, i \in \mathbb{N})$ je pokrivač od X. Naime, za svaki $x \in X$, neka je $i_x \in \mathbb{N}$ najmanji prirodan broj takav da je $x \in W_{x_i}$. Takav sigurno postoji jer je $(W_{x_i}, i \in \mathbb{N})$ pokrivač od X, pa je skup $\{i \in \mathbb{N} : x \in W_{x_i}\}$ neprazan podskup od $\mathbb{N}$. Sada je $x \in U_{i_x}$, po definiciji od U_{i_x}.

Definirajmo

$$U := \bigcup\{U_i : A \cap U_i \neq \emptyset\} \text{ i } W := \bigcup\{U_i : A \cap U_i = \emptyset\}$$

Kako je $(U_i, i \in \mathbb{N})$ pokrivač od X, to je, očito, $A \subseteq U$. Dokažimo da je $B \subseteq W$. Za svaki $i \in \mathbb{N}$ takav da je $U_i \cap A \neq \emptyset$, vrijedi $U_i \cap B = \emptyset$. Doista, kad bi postojao $i \in \mathbb{N}$ takav da je $U_i \cap A \neq \emptyset$ i $U_i \cap B \neq \emptyset$, onda bi vrijedilo $W_{x_i} \cap A \supseteq U_i \cap A \neq \emptyset$ i $W_{x_i} \cap B \supseteq U_i \cap B \neq \emptyset$, što je u kontradikciji s činjenicom da je, za svaki $i \in \mathbb{N}$, barem jedan od skupova $W_{x_i} \cap A$,$W_{x_i} \cap B$ prazan. Kako je $B \subseteq \bigcup\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ i $B \cap (\bigcup\{U_i : A \cap U_i \neq \emptyset\}) = \emptyset$, to je $B \subseteq \bigcup\{U_i : A \cap U_i = \emptyset\} = W$.
Skupovi U i W su otvoreni podskupovi od X i očito je $U \cup W = X$.Nadalje, skupovi U_i su u parovima disjunkti, pa je $U = X \setminus W$. Dakle, U je otvoreno-zatvoren podskup od X za koji vrijedi $A \subseteq U$ i $B \subseteq X \setminus U$. ■

Drugi teorem o separaciji za dimenziju 0 dokazujemo pomoću dvije leme.

Lema 1.22 *Neka je X metrizabilan prostor i $A, B \subseteq X$ podskupovi od X takvi da je $ClA \cap B = A \cap ClB = \emptyset$. Tada postoje otvoreni skupovi $U, W \subseteq X$ takvi da je*

$$A \subseteq U, B \subseteq V \text{ i } U \cap W = \emptyset$$

.

Dokaz. Neka je d metrika koja metrizira toplogiju na X. Definirajmo funkcije $f, g : X \to [0, \cdot\rangle$

$$f(x) := d(x, A), g(x) = d(x, B)$$

Prisjetimo se: Udaljenost točke x od skupa A, u oznaci $d(x, A)$, je $d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in Y\}$. Funkcije f i g su neprekidne, pa su skupovi $U := \{x \in X : (f - g)(x) < 0\}$ i $V := \{x \in X : (f - g)(x) > 0\}$ otvoreni i međusobno disjunktni.
Neka je $x \in A$ proizvoljan. Kako je $A \cap ClB = \emptyset$, vrijedi $x \notin ClB$. Nadalje, vrijedi $g^{-1}(\{0\}) = ClB$ i $f^{-1}(\{0\}) = ClA$, pa je $g(x) > 0$ i $f(x) = 0$. Odavde

slijedi $f(x) - g(x) = 0 - g(x) < 0$, pa je $x \in U$. Dakle, $A \subseteq U$.
Slično, za $x \in B$ proizvoljan, iz $ClA \cap B = \emptyset$, slijedi $x \notin ClA$. Dakle, $f(x) > 0$ i $g(x) = 0$, pa je $f(x) - g(x) = f(x) - 0 > 0$, odnosno $x \in W$. Time smo dokazali da je $B \subseteq W$. ∎

Lema 1.23 *Neka je M potprostor metrizabilnog prostora X, A, B par disjunktnih zatvorenih podskupova od X i V_1, V_2 otvoreni podskupovi od X takvi da je*

$$A \subseteq V_1, B \subseteq V_2 \text{ i } ClV_1 \cap ClV_2 = \emptyset.$$

Tada, za svaki separator L' skupova $M \cap ClV_1$ i $M \cap ClV_2$ u prostoru M, postoji separator L skupovaA i B u prostoru X takav da vrijedi $M \cap L \subseteq L'$.

Dokaz. Neka su $U', W' \subseteq M$ otvoreni podskupovi od M za koje vrijedi

$$M \cap ClV_1 \subseteq U', M \cap ClV_2 \subseteq W', U' \cap W' = \emptyset \text{ i } M \setminus L' = U' \cup W'.$$

Primjetimo da je

$$A \cap ClW' = \emptyset = B \cap ClU'.$$

Zaista, vrijedi $V_1 \cap W' = M \cap V_1 \cap W' \subseteq M \cap ClV_1 \cap W' \subseteq U' \cap W' = \emptyset$. Kako je $V_1 \subseteq X$ otvoren u X, to je, po Napomeni 1.9, $V_1 \cap ClW' = \emptyset$. Odavde slijedi da je $A \cap ClW' \subseteq V_1 \cap ClW' = \emptyset$.
Slično, $V_2 \cap U' = M \cap V_2 \cap U' \subseteq M \cap ClV_2 \cap U' \subseteq W' \cap U' = \emptyset$, pa je i $B \cap ClU' \subseteq V_2 \cap ClU' = \emptyset$. Odavde slijedi, $A \cap W' \subseteq A \cap ClW' = \emptyset$ i $B \cap U' \subseteq B \cap ClU' = \emptyset$.

Dokažimo sada da je $U' \cap ClW' = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji $x \in U' \cap ClW'$. Kako je $U' \subseteq M$ otvoren u M, to postoji $U_1 \subseteq X$ otvoren u X takav da je $U_1 \cap M = U'$. Sada je $x \in U' \cap ClW' = U_1 \cap M \cap ClW' \subseteq U_1 \cap ClW'$. Kako je $U_1 \subseteq X$ otvoren, to je, po prethodnoj lemi,

$\emptyset \neq U_1 \cap W' = U_1 \cap M \cap W' = U' \cap W' = \emptyset$, čime je dobivena kontradikcija. Dakle $U' \cap ClW' = \emptyset$.

Analogno pokazujemo da je $W' \cap ClU' = \emptyset$. Odavde slijedi da je $Cl(A \cup U') \cap (B \cup W') = (ClA \cup ClU') \cap (B \cup W') = (ClA \cap B) \cup (ClA \cap W') \cup (ClU' \cap B) \cup (ClU' \cap W') = (A \cap B) \cup (A \cap W') \cup (ClU' \cap B) \cup (ClU' \cap W') = \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

Slično, vrijedi $(A \cup U') \cap Cl(B \cup W') = (A \cup U') \cap (ClB \cup ClW') = (A \cap ClB) \cup (A \cap ClW') \cup (U' \cap ClB) \cup (U' \cap ClW') = (A \cap B) \cup (A \cap ClW') \cup (U' \cap B) \cup (U' \cap ClW') = \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$. Sada, po Lemi 1.22, postoje otvoreni skupovi $U, W \subseteq X$ u X takvi da je $A \cap U' \subseteq U$, $B \cup W' \subseteq W$ i $U \cap W = \emptyset$.

Stavimo $L := X \setminus (U \cup W)$. Skup L je separator skupova A i B u prostoru X, jer, za otvorene skupove $U, W \subseteq X$, vrijedi $A \cap U' \subseteq U$, $B \cup W' \subseteq W$, $U \cap W = \emptyset$ i $X \setminus L = U \cup W$. Nadalje, vrijedi $M \cap L = M \cap (U \cup W) \subseteq M \cap (U' \cup W') = L'$. Time je lema u potpunosti dokazana. ■

Teorem 1.24 (Drugi teorem separacije za dimenziju 0) *Neka je X metrizabilan prostor i $Z \subseteq X$ 0-dimenzionalni separabilan potprostor od X. Tada, za svaki par zatvorenih disjunktnih podskupova $A, B \subseteq X$ od X, postoji separator L skupova A i B takav da je $L \cap Z = \emptyset$.*

Dokaz. Kako je X metrizabilan prostor, to je X normalan, pa, po jednoj od karakterizacija normalnosti, za disjunktne zatvorene podskupove $A, B \subseteq X$, postoje otvorene okoline V_1, V_2 od A i B redom takve da je $ClV_1 \cap ClV_2 = \emptyset$. Po Prvom teoremu separacije za dimenziju 0, prazan skup je separator skupova $Z \cap ClV_1$ i $Z \cap ClV_2$ u prostoru Z. Po prethodnoj lemi, postoji separator L skupova A i B u prostoru X takav da vrijedi $L \cap Z = \emptyset$. ■

Teorem 1.25 *Neka je $M \subseteq X$ separabilan potprostor metrizabilnog prostora X. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) M je 0-dimenzionalan.

(ii) M je neprazan i, za svaku točku $x \in X$ i svaku okolinu V točke x u X, postoji otvoren skup $U \subseteq X$ u X takav da je $x \in U \subseteq V$ i $M \cap FrU = \emptyset$.

(iii) M je neprazan i, za svaku točku $x \in M$ i svaku okolinu V točke x u X, postoji otvoren skup $U \subseteq X$ u X takav da je $x \in U \subseteq V$ i $M \cap FrU = \emptyset$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Pretpostavimo da je M 0-dimenzionalan. Tada je $M \neq \emptyset$. Neka je $x \in X$ proizvoljna točka i $V \subseteq X$ po volji odabrana okolina od x u X. Po Drugom teoremu o separaciji za dimenziju 0, postoji separator L točke x i skupa $X \setminus IntV$ u prostoru X, takav da je $L \cap M = \emptyset$. Dakle, postoje otvoreni skupovi $U, W \subseteq X$ u X takvi da je $x \in U$, $X \setminus IntV \subseteq W$, $U \cap W = \emptyset$ i $X \setminus L = U \cup W$. Odavde slijedi da je $x \in U \subseteq X \setminus W \subseteq IntV \subseteq V$. Po napomeni 1.11, vrijedi $FrU \subseteq L$, pa je $FrU \cap M \subseteq L \cap M = \emptyset$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Očito.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Pretpostavimo da je M neprazan i da, za svaku točku $x \in M$ i svaku okolinu V točke x u X, postoji otvoren skup $U \subseteq X$ u X takav da je $x \in U \subseteq V$ i $M \cap FrU = \emptyset$. Odavde odmah slijedi $indM \neq -1$. Dokažimo još da je $indM \leq 0$. Po propoziciji 1.13, dovoljno je dokazati da, za svaki $x \in M$ i svaki zatvoren skup $B' \subseteq M$ u M takav da je $x \notin B'$, postoji separator L' tovčke x i skupa B' u prostoru M takav da je $indL' = -1$, tj. $L' = \emptyset$.

Neka je $x \in M$ proizvoljna točka i $B' \subseteq M$ po volji odabran zatvoren skup u M takav da $x \notin B'$. Tada postoji zatvoren skup $B \subseteq X$ u X takav da je $B \cap M = B'$. Očito vrijedi $x \notin B$, pa je $X \setminus B$ otvorena okolina od x u X. Po pretpostavci, postoji otvoren skup $U \subseteq X$ u X takav da $x \in U \subseteq X \setminus B$

i $M \cap FrU = \emptyset$. Tada je skup $U' := U \cap M$ otvoren u M, a, po napomeni 1.5, je $Fr_M U' \subseteq FrU$. Kako je $Fr_M U' \subseteq M$, to je $Fr_M U' \subseteq FrU \cap M = \emptyset$. Iz ovoga slijedi da je U' zatvoren u M, pa je $W' := M \setminus U'$ otvoren u M. Sada, vrijedi $x \in U'$, $B' = B \cap M \subseteq (X \setminus U) \cap M = M \setminus U = M \setminus U' = W'$, $U' \cap W' = \emptyset$ i $U' \cup W' = M$. Dakle, $L' := M \setminus (U' \cup W') = \emptyset$ je separator točke x i skupa B' u prostoru M. ■

Propozicija 1.26 *Neka je $M \subseteq X$ potprostor separabilnog metrizabilnog prostora X. M je 0-dimenzionalan ako i samo ako je neprazan i X ima prebrojivu bazu $\mathcal{B}$ takvu da je $M \cap FrU = \emptyset$, za svaki $U \in \mathcal{B}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je M 0-dimenzionalan prostor. Tada je M neprazan. Po Teoremu 1.25, za svaki $x \in X$ i svaku okolinu V od x u X, postoji otvoren skup $U_V \subseteq X$ u X takav da je $x \in U_V \subseteq V$ i $M \cap FrU_V = \emptyset$. Neka je $\mathcal{B}(x) := \{U_V : V \subseteq X \text{ je okolina točke } x \text{ u prostoru } X\}$ i $\mathcal{B}_0 := \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$. Tada je $\mathcal{B}_0$ baza prostora X za koju vrijedi $FrU \cap M = \emptyset$, za svaki $U \in \mathcal{B}_0$. Iz Leme 1.16 slijedi da postoji prebrojiva baza $\mathcal{B}$ od X takva da je $FrU \cap M = \emptyset$, za svaki $U \in \mathcal{B}$.

Obratno, neka je M neprazan i X ima prebrojivu bazu $\mathcal{B}$ takvu da je $M \cap FrU = \emptyset$, za svaki $U \in \mathcal{B}$. Tada, očito, za svaki $x \in X$ i svaku okolinu V točke x u X, postoji otvoren skup $U \subseteq X$ u X takav da je $x \in U \subseteq V$ i $M \cap FrU = \emptyset$. Iz Teorema 1.25 slijedi $indM = 0$. ■

Sljedeći teorem će nam dati odgovor na pitanje može li se 0-dimenzionalan prostor povećati na način da mu se dimenzija ne promijeni. Dokazat ćemo da, za svaki 0-dimenzionalan prostor, postoji 0-dimenzionalni natprostor koji je ujedno i G_δ-skup.

Prisjetimo se, za skup A iz prostora X kažemo da je G_δ-skup (F_σ-skup), ako se A može prikazati kao presjek (unija) od prebrojivo mnogo otvorenih (zatvorenih) skupova iz X. Pojmovi G_δ-skupa i F_σ-skupa su dualni u sljedećem smislu. Ako je $A \subseteq X$ G_δ-skup, onda je komplement $X \setminus A$ od A F_σ-skup i obratno.

Kako je svaki metrizabilan prostor savršeno normalan, to je svaki zatvoren skup u metrizabilnom prostoru G_δ-skup. Prisjetimo se da za normalan prostor X kažemo da je savršeno normalan, ako je svaki zatvoren skup $A \subseteq X$ iz X G_δ-skup.

Nadalje, ako je $Y \subseteq X$ G_δ-skup u prostoru X i $Z \subseteq Y$ G_δ-skup u Y, onda je Z G_δ-skup i u X. Naime, ako je $Y \subseteq X$ G_δ-skup u prostoru X i $Z \subseteq Y$ G_δ-skup u Y, onda postoje otvoreni skupovi $U_n, V_n \subseteq X$ u X, za svaki $n \in \mathbb{N}$, takvi da je

$$Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (V_n \cap Y) \;\text{ i } Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Sada je

$$Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (V_n \cap Y) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[V_n \cap \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} U_m \right) \right] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (V_n \cap U_m)\,,$$

pa je Z G_δ-skup u X.

Teorem 1.27 (Teorem o proširenju za dimenziju 0) *Neka je X metrizabilan prostor i $Z \subseteq X$ separabilan 0-dimenzionalan potprostor od X. Tada postoji 0-dimenzionalan potprostor $Z^* \subseteq X$ takav da je $Z \subseteq Z^*$ i Z^* je G_δ skup u X.*

Dokaz. Stavimo $Y := ClZ$. Kako je Z separabilan, to postoji prebrojiv podskup $D \subseteq Z$ takav da je $Cl_Z D = Z$. Budući da je Z gust u Y i D gust u Z, to je D gust u Y, pa je Y također separabilan metrizabilan prostor. Iz prethodne propozicije slijedi da postoji prebrojiva baza $\mathcal{B}$ prostora Y takva da je $Z \cap Fr_Y U = \emptyset$, za svaki $U \in \mathcal{B}$. Definirajmo $F := \bigcup\{Fr_Y U : U \in \mathcal{B}\}$. F je F_σ-skup u Y, pa je njegov komplement u Y, $Z^* := Y \setminus F$ G_δ-skup u Y. Kako je $Y \subseteq X$ zatvoren podskup metrizabilnog prostora X, to je Y G_δ-skup u X, pa je Z^*, također, G_δ-podskup i od X. Nadalje, jer je $Z \cap Fr_Y U = \emptyset$, za svaki $U \in \mathcal{B}$, to je $F \cap Z = \emptyset$, pa je $Z \subseteq Z^*$. Za svaki $U \in \mathcal{B}$ je $Z^* \cap Fr_Y U = \emptyset$ i $\mathcal{B}$ je prebrojiva baza separabilnog metrizabilnog prostora Y, pa je, po prethodnoj propoziciji, Z^* 0-dimenzionalan prostor. ■

Teorem 1.28 (Teorem sume za dimenziju 0) *Neka je X separabilan metrizabilan prostor i $(F_n, n \in \mathbb{N})$ niz zatvorenih 0-dimenzionalnih potprostora $F_n \subseteq X$ prostora X tako da vrijedi$X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Tada je X 0-dimenzionalan prostor.*

Dokaz. Neka je $A, B \subseteq X$ par disjunktnih zatvorenih podskupova prostora X. Pokazat ćemo da postoje otvoreni skupovi $U, W \subseteq X$ u X takvi da je

$$A \subseteq U, \ B \subseteq W, \ U \cap W = \emptyset \text{ i } U \cup W = X,$$

tj. da je prazan skup separator skupova A i B u prostoru X.

Rekurzivno ćemo definirati dva niza $(U_n, n \in \mathbb{N}_0), (W_n, n \in \mathbb{N}_0)$ otvorenih podskupova $U_n, W_n \subseteq X$ prostora X, takva da

$$U_{i-1} \subseteq U_i, \ W_{i-1} \subseteq W_i, \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

i

$$ClU_i \cap ClW_i = \emptyset, \ F_i \subseteq U_i \cup W_i \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}_0, \text{ gdje je } F_0 = \emptyset. \tag{1.2}$$

Kako je X metrizabilan prostor, to je X normalan, pa, po jednoj od karakterizacija normalnih prostora, postoje otvoreni skupovi $U_0, W_0 \subseteq X$ u X takvi da je

$$A \subseteq U_0, \ B \subseteq W_0 \text{ i } ClU_0 \cap ClW_0 = \emptyset.$$

Kako je $F_0 = \emptyset \subseteq U \cup W$, to su za U_0, W_0 ispunjeni uvjeti 1.1 i 1.2.

Pretpostavimo da smo definirali skupove U_i, W_i koji zadovoljavaju relacije 1.1 i 1.2, za svaki $i < k$.

Skupovi $ClU_{k-1} \cap F_k$ i $ClW_{k-1} \cap F_k$ su zatvoreni u X i disjunktni, jer je $(ClU_{k-1} \cap F_k) \cap (ClW_{k-1} \cap F_k) \subseteq ClU_{k-1} \cap ClW_{k-1} = \emptyset$. Kako je F_k 0-dimenzionalan prostor i $ClU_{k-1} \cap F_k$, $ClW_{k-1} \cap F_k$ zatvoreni disjunktni skupovi u F_k, to, po Prvom teoremu separacije za dimenziju 0, postoji zatvoreno-otvoren skup $V \subseteq F_k$ u F_k takav da je

$$ClU_{k-1} \cap F_k \subseteq V \text{ i } ClW_{k-1} \cap F_k \subseteq F_k \setminus V.$$

Sada je

$(ClU_{k-1} \cup V) \cap [ClW_{k-1} \cup (F_k \setminus V)] =$

$= [(ClU_{k-1} \cup V) \cap ClW_{k-1}] \cup [(ClU_{k-1} \cup V) \cap (F_k \setminus V)] = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$

Kako je $F_k \subseteq X$ zatvoren u X, a V i $F_k \setminus V$ zatvoreni u F_k, to su V i $F_k \setminus V$ zatvoreni i u X. Odavde slijedi da su $ClU_{k-1} \cup V$, $ClW_{k-1} \cup (F_k \setminus V) \subseteq X$ zatvoreni i disjunktni skupovi u X. Budući da je prostor X normalan, slijedi da postoje otvoreni skupovi $U', W' \subseteq X$ takvi da je

$ClU_{k-1} \cup V \subseteq U'$, $ClW_{k-1} \cup (F_k \setminus V) \subseteq W'$ i $ClU' \cap ClW' = \emptyset$.

Stavimo $U_k := U', W_k := W'$. Za otvorene skupove $U_k, W_k \subseteq X$ vrijedi:

$U_{k-1} \subseteq ClU_{k-1} \subseteq ClU_{k-1} \cup V \subseteq U_k$,

$W_{k-1} \subseteq ClW_{k-1} \subseteq ClW_{k-1} \cup (F_k \setminus V) \subseteq W_k$,

$ClU_k \cap ClW_k = \emptyset$ i

$F_k \subseteq V \cup (F_k \setminus V) \subseteq (ClU_{k-1} \cup V) \cup (ClW_{k-1} \cup (F_k \setminus V)) \subseteq U_k \cup W_k$.

Dakle, ispunjeni su uvijeti 1.1 i 1.2. Time smo konstrirali nizove $(U_n, n \in \mathbb{N}_0), (W_n, n \in \mathbb{N}_0)$ s traženim svojstvima.

Stavimo $U := \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i$ i $W := \bigcup_{i=0}^{\infty} W_i$. Skupovi $U, W \subseteq X$ su otvoreni u X, te vrijedi $A \subseteq U$, $B \subseteq W$. Nadalje U i W su disjunktni, jer da postoji $x \in U \cap W$, onda bi postojali $i_0, j_0 \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $x \in U_{i_0}$ i $x \in W_{j_0}$. Odavde bi slijedilo $x \in U_{max\{i_0,j_0\}} \cap W_{max\{i_0,j_0\}} = \emptyset$, što je kontradikcija. Nadalje, kako je $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ to, za svaki $x \in X$, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in F_n \subseteq U_n \cup W_n \subseteq U \cup W$, pa je $X = U \cup W$.

Time smo dokazali da, za svaki par disjunktnih zatvorenih skupova $A, B \subseteq X$ u X, postoje otvoreni skupovi $U, W \subseteq X$ u X takvi da je

$$A \subseteq U,\ B \subseteq W,\ U \cap W = \emptyset \text{ i } U \cup W = X,$$

tj. prazan skup je separator skupova A i B. Sada, za proizvoljnu točku $x \in X$ i po volji odabran zatvoren skup $B \subseteq X$ takav da $x \notin B$, prazan skup separira točku x i skup B, tj. postoji separator L točke x i skupa B za koji vrijedi $indL = -1$. Iz Propozicije 1.13 slijedi da je $indX \leq 0$, a kako je $F_n \subseteq X$ 0-dimenzionalan, to je $\emptyset \neq F_n \subseteq X$, za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$, očito je $indX = 0$. ■

Propozicija 1.29 *Neka je* $(W_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ *otvoreno-zatvoreni pokrivač regularnog prostora* X*. Ako je* $indW_\lambda = 0$*, za svaki* $\lambda \in \Lambda$*, onda je* $indX = 0$*.*

Dokaz. Neka je $x \in X$ proizvoljna točka i $V \subseteq X$ proizvoljna okolina točke x u X. Tada postoji $\lambda \in \Lambda$ takav da je $x \in W_\lambda$. Budući da je prostor W_λ 0-dimenzionalan i $W_\lambda \cap V$ okolina točke x u W_λ, postoji otvoren skup $U \subseteq W_\lambda$ u W_λ takav da vrijedi $x \in U \subseteq W_\lambda \cap V$ i $Fr_{W_\lambda} U = \emptyset$. Odavde slijedi da je skup U i zatvoren u W_λ. Kako je W_λ otvoreno-zatvoren u X, to je U otvoreno-zatvoren u X. Dakle, $FrU = \emptyset$, tj. $indFrU = -1$. Budući da je $x \in U \subseteq V$, zaključujemo da je $indX \leq 0$. Očito je $X \neq \emptyset$, pa je $indX = 0$. ■

Sada ćemo pokazati da je produkt prebrojive familije 0-dimenzionalnih prostora 0-dimenzionalan prostor. Prisjetimo se da čim je produkt $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ familije regularnih prostora $(X_i, i \in \mathbb{N})$ neprazan, svaki od prostora X_{i_0} ima svoju "kopiju" u produktu X, tj. X_{i_0} je homeomorfan potprostoru $X_{i_0} \times \prod_{i \in \mathbb{N}, i \neq i_0} \{x_i\}$, gdje su $x_i \in X_i$, $i \in \mathbb{N} \setminus \{i_0\}$ proizvoljne točke.

Teorem 1.30 (Teorem o produktu za dimenziju 0) *Neka je* $(X_i, i \in \mathbb{N})$ *prebrojiva familija regularnih prostora. Produkt* $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ *je 0-dimenzionalan ako i samo ako je prostor* X_i *0-dimenzionalan, za svaki* $i \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je X 0-dimenzionalan. Tada je $X \neq \emptyset$ i $X_i \neq \emptyset$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, pa je svaki od prostora X_i homeomorfan nekom potprostoru od X. Iz Teorema o potprostoru i činjenice da je mala induktivna dimenzija topološka invarijanta u klasi regularnih prostora, slijedi da je $indX_i = 0$, za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Obratno, pretpostavimo da je $indX_i = 0$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je $indX = 0$. Po Teoremu 1.14, dovoljno je dokazati da X ima bazu $\mathcal{B}$ takvu da je $indFrU = -1$, za svaki $U \in \mathcal{B}$, tj. da X ima bazu koja se sastoji od otvoreno-zatvorenih skupova u X. Naime,

$$indFrU = -1 \iff FrU = \emptyset \iff \emptyset = ClU \setminus IntU \iff ClU = IntU = U.$$

Po Teoremu 1.14, za svaki $i \in \mathbb{N}$, postoji baza $\mathcal{B}_i$ prostora X_i koja se sastoji od otvoreno-zatvorenih skupova u X_i. Stavimo

$$\mathcal{B} := \{U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_k} \times \prod_{i\in\mathbb{N}\setminus\{i_1,\ldots,i_k\}} X_i : k \in \mathbb{N}, i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}, U_{i_j} \in \mathcal{B}_{i_j}, j = 1, \ldots, k\}.$$

Prvo, primjetimo da je svaki od skupova $U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_k} \times \prod_{i\in\mathbb{N}\setminus\{i_1,\ldots,i_k\}} X_i$ otvoren (jer je element standardne baze produktne topologije) i zatvoren (jer je produkt zatvorenih skupova) u X. Nadalje, $\mathcal{B}$ je baza od X. Naime, za proizvoljnu točku $x = (x_i) \in X$ i po volji odabran otvoren skup $U \subseteq X$ takav da je $x \in U$, postoji element $W_{i_1} \times \cdots \times W_{i_k} \times \prod_{i\in\mathbb{N}\setminus\{i_1,\ldots,i_k\}} X_i$ standardne baze produktne topologije, takav da je $x \in W_{i_1} \times \cdots \times W_{i_k} \times \prod_{i\in\mathbb{N}\setminus\{i_1,\ldots,i_k\}} X_i \subseteq U$. Sada, za svaki $j \in \{1, \ldots, k\}$, postoji element $U_{i_j} \in \mathcal{B}_{i_j}$ baze $\mathcal{B}_{i_j}$ takav da je $x_{i_j} \in U_{i_j} \subseteq W_{i_j}$, pa je $x \in U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_k} \times \prod_{i\in\mathbb{N}\setminus\{i_1,\ldots,i_k\}} X_i \subseteq W_{i_1} \times \cdots \times W_{i_k} \times$

$\prod_{i\in\mathbb{N}\setminus\{i_1,\ldots,i_k\}} X_i \subseteq U$. Kako je $U_{i_1}\times\cdots\times U_{i_k}\times \prod_{i\in\mathbb{N}\setminus\{i_1,\ldots,i_k\}} X_i \in \mathcal{B}$, pokazano je da je $\mathcal{B}$ baza prostora X. Dakle, X je 0-dimenzionalan prostor. ■

1.3 Teorem sume, Teoremi dekompozicije i Teorem o produktu

U ovom odjeljku ćemo navesti i dokazati važne teoreme o ponašanju male induktivne dimenzije prema operacijama s topološkim prostorima i to u klasi separabilnih metrizabilnih prostora.

Najprije dokazujemo Teorem sume.

Lema 1.31 *Neka je X separabilan metrizabilan prostor. Ako postoje potprostori $Y, Z \subseteq X$ od X takvi da je $indY \leq n-1$ i $indZ \leq 0$, onda je $indX \leq n$.*

Dokaz. Neka je $x \in X$ proizvoljna točka i $V \subseteq X$ po volji odabrana otvorena okolina od x u X. Po Drugom teoremu o separaciji za dimenziju 0, postoji separator L točke x i zatvorenog skupa $X \setminus IntV$ u prostoru X takav da je $L \cap Z = \emptyset$, tj. postoje otvoreni skupovi $U, W \subseteq X$ u X takvi da vrijedi $x \in U$, $X\setminus IntV \subseteq W$, $U\cap W = \emptyset$ i $X\setminus L = U\cup W$, te $(X\setminus(U\cup W))\cap Z = \emptyset$. Odavde slijedi da je $x \in U \subseteq X\setminus W \subseteq IntV \subseteq V$ i $Z \subseteq U\cup W$. Po Napomeni 1.11, je $FrU \subseteq L$, pa je $FrU \subseteq X \setminus (U\cup W) \subseteq X\setminus Z \subseteq Y$. Iz Teorema o potprostoru slijedi da je $indFrU \leq indY \leq n-1$. Dakle, $indX \leq n$. ■

Općenito, potprostor separabilnog prostora ne mora biti separabilan, no potprostor 2-prebrojivog prostora je uvijek 2-prebrojiv. Kako su kod mmetrizabilnih prostora pojmovi separabilnosti i 2-prebrojivosti ekvivalentni, to je potprostor separabilnog metrizabilnog prostora uvijek separabilan metrizabilan prostor.

Teorem 1.32 (Teorem sume) *Neka je X separabilan metrizabilan prostor, $n \in \mathbb{N}_0$ i $(F_i, i \in \mathbb{N})$ prebrojiva familija zatvorenih potprostora $F_i \subseteq X$ prostora X tako da je $indF_i \leq n$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, te $X = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} F_i$. Tada je $indX \leq n$.*

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po n.

Za $n = 0$, tvrdnja slijedi iz Teorema sume za dimenziju 0 koji smo dokazali u prethodnom poglavlju. Naime, ako postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $indF_i = 0$, onda za prebrojivu familiju $(F_j, j \in J)$, gdje je $J = \{i \in \mathbb{N} : F_i \neq \emptyset\}$, zatvorenih skupova $F_j \subseteq X$, vrijedi $indF_j = 0$, za svaki $j \in J$ i $X = \bigcup\limits_{j\in J} F_j$, pa je $indX = 0$. Ako je $indF_i = -1$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, onda je $F_i = \emptyset$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, pa je $X = \emptyset$, odnosno $indX = -1$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi, za svaki $k < n \geq 1$, i neka je (F_i) niz zatvorenih potprostora $F_i \subseteq X$ od X tako da je $indF_i \leq n$, za svaki $i \in \mathbb{N}$ i $X = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} F_i$. Po Teoremu 1.15, svaki potprostor $F_i \subseteq X$ ima prebrojivu bazu $\mathcal{B}_i$ takvu da je $indFr_{F_i}U \leq n - 1$, za svaki $U \in \mathcal{B}_i$.
Stavimo $Y := \bigcup\{Fr_{F_i}U : i \in \mathbb{N}, U \in \mathcal{B}_i\}$. Za svaki $U \in \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_i$, skup $Fr_{F_i}U \subset F_i$ je zatvoren skup u F_i, a kako je $F_i \subseteq X$ zatvoren u X, to je $Fr_{F_i}U \subseteq X$ zatvoren i u X, pa je zatvoren i u potprostoru $Y \subseteq X$. Dakle, separabilni metrizabilan prostor Y možemo prikazati kao uniju prebrojive familije $(Fr_{F_i}U, i \in \mathbb{N}, U \in \mathcal{B}_i)$ zatvorenih podskupova $Fr_{F_i}U \subseteq Y$ takvih da je $indFr_{F_i}U \leq n - 1$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $indY \leq n - 1$.

Stavimo $Z_i := F_i \setminus Y \subseteq F_i$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je $indZ_i \leq 0$. Po Propoziciji 1.26, dovoljno je dokazati da F_i ima prebrojivu bazu $\mathcal{B}'_i$ takvu da je $Z_i \cap FrU = \emptyset$, za svaki $U \in \mathcal{B}'_i$. No, to upravo vrijedi za bazu $\mathcal{B}_i$ od F_i jer je, za svaki $U \in \mathcal{B}_i$ $FrU \subseteq Y$.

Sada definirajmo $Z := \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} Z_i = X \setminus Y$. Kako je $F_i \cap Z = F_i \cap (X \setminus Y) = F_i \setminus Y = Z_i$, to je $Z_i \subseteq Z$ zatvoren u Z, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Dakle, separabilan

metrizabilan prostor Z možemo prikazati kao uniju prebrojive familije $(Z_i, i \in \mathbb{N})$ zatvorenih skupova $Z_i \subseteq Z$ takvih da je $indZ_i \leq 0$. Iz Teorema sume za dimenziju 0 slijedi $indZ \leq 0$.
Primjenom prethodne leme dobivamo $indX \leq n$. ■

Teoremi dekompozicije nam daju još jednu karakterizaciju nejednakosti $indX \leq n \geq 0$, i to pomoću rastava (dekompozicije) prostora na potprostore.

Teorem 1.33 (Prvi teorem dekompozicije) *Neka je X separabilan metrizabilan prostor i $n \in \mathbb{N}_0$. Vrijedi $indX \leq n$ ako i samo ako postoje potprostori $Y, Z \subseteq X$ prostora X takvi da je*

$$indY \leq n-1,\ indZ \leq 0 \ i\ X = Y \cup Z$$

Dokaz. Dovoljnost smo dokazali u Lemi 1.31, pa je dovoljno dokazati nužnost.

Pretpostavimo da je $indX \leq n$. Po Teoremu 1.15, X ima prebrojivu bazu $\mathcal{B}$ takvu da je $indFrU \leq n-1$, za svaki $U \in \mathcal{B}$. Definirajmo $Y := \bigcup\{FrU : U \in \mathcal{B}\}$ i $Z := X \setminus Y$. Sada Y možemo prikazati kao uniju prebrojive familije $(FrU, U \in \mathcal{B})$ zatvorenih skupova $FrU \cap Y = FrU \subseteq Y$ u Y takvih da je $indFrU \leq n-1$, za svaki $U \in \mathcal{B}$. Iz Teorema sume slijedi $indY \leq n-1$. Nadalje, za svaki $U \in \mathcal{B}$ je $FrU \cap Z = \emptyset$, pa iz Propozicije 1.26 slijedi $indZ \leq 0$. Očito vrijedi $X = Y \cup Z$. ■

Iz Prvog teorema dekompozicije lako indukcijom dobijemo Drugi teorem dekompozicije:

Teorem 1.34 (Drugi teorem dekompozicije) *Neka je X separabilan metrički prostor i $n \in \mathbb{N}_0$. Tada je $indX \leq n$ ako i samo ako, za svaki $i \in \{1, \dots, n+1\}$, postoji potprostor $Z_i \subseteq X$ prostora X, tako da vrijedi*

$$indZ_i \leq 0,\ za\ svaki\ i \in \{1, \dots, n+1\}\ i\ X = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i.$$

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po n. Za $n = 0$ tvrdnja je očito ispunjena. Pretpostavimo da, za svaki $k < n$, vrijedi tvrdnja teorema.

Neka je $indX = n$. Po Prvom teoremu dekompozicije, postoje potprostori Y i Z prostora X takvi da je $indY \leq n-1$, $indZ \leq 0$ i $X = Y \cup Z$. Po pretpostavci indukcije, postoje potprostori $Z_1, \dots, Z_n \subseteq Y$ prostora Y takvi da je $indZ_i = 0$, za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ i $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{n} Z_i$. Sada su $Z_1, \dots, Z_n, Z_{n+1} := Z \subseteq X$ potprostori od X takvi da je $indZ_i = 0$, za svaki $i \in \{1, \dots, n+1\}$ i $X = Y \cup Z = \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} Z_i$.

Obratno, pretpostavimo da postoje potprostori $Z_i \subseteq X$ prostora X $i \in \{1, \dots, n+1\}$ takvi da vrijedi

$$indZ_i \leq 0 \text{ za svaki } i \in \{1, \dots, n+1\} \text{ i } X = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i.$$

Po pretpostavci indukcije, za prostor $Y := \bigcup\limits_{i=1}^{n} Z_i$ vrijedi $indY \leq n-1$. Sada, iz Prvog teorema dekompozicije slijedi $indX \leq n$. ■

Jedna od posljedica Drugog teorema dekompozicije je Teorem adicije:

Teorem 1.35 (Teorem adicije) *Neka je X separabilan metrizabilan prostor i $X_1, X_2 \subseteq X$ potprostori od X. Tada je*

$$indX \leq indX_1 + indX_2 + 1.$$

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $i \in \{1, 2\}$ takav da $indX_i = \infty$. Tada je očito $indX = \infty$ jer bi, u suprotnom, iz Teorema o potprostoru slijedilo $\infty = indX_i \leq indX < \infty$. Dakle,

$$indX = \infty = indX_1 + indX_2 + 1,$$

pa u ovom slučaju tvrdnja teorema vrijedi.

Pretpostavimo da je $indX_1, indX_2 < \infty$, tj. neka postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$ takvi da je $indX_1 = n_1$ i $indX_2 = n_2$. Po Drugom teoremu dekompozicije, postoje 0-dimenzionalni potprostori $Z_1, \dots, Z_{n_1+1} \subseteq X_1$ prostora X_1 i $Y_1, \dots, Y_{n_2+1} \subseteq X_2$ prostora X_2 takvi da je $X_1 = \bigcup_{i=1}^{n_1+1} Z_i$ i $X_2 = \bigcup_{i=1}^{n_2+1} Y_i$. Sada je $X = X_1 \cup X_2 = (\bigcup_{i=1}^{n_1+1} Z_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n_2+1} Y_i)$, pa, po Drugom teoremu dekompozicije, vrijedi $indX \leq (n_1+1)+(n_2+1)-1 = n_1+n_2+1 = indX_1+indX_2+1$. ■

Teorem o proširenju nam govori kako separabilan potprostor metrizabilnog prostora dopušta proširenje do G_δ-prostora bez povećanja dimenzije.

Teorem 1.36 (Teorem o proširenju) *Neka je X metrizabilan prostor, $M \subseteq X$ separabilan potprostor prostora X i $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. Ako vrijedi $indM \leq n$, onda postoji G_δ-skup $M^* \subseteq X$ u X takav da je $M \subseteq M^*$ i $indM \leq indM^*$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $indM \leq n$. Tada, po Drugom teoremu dekompozicije, postoje potprostori $Z_1, \dots, Z_{n+1} \subseteq M$ takvi da je $indZ_i \leq 0$, za svaki $i \in \{1, \dots, n+1\}$ i $M = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i$. Po Teoremu o proširenju za dimenziju 0, svaki Z_i možemo proširiti do G_δ-skupa Z_i^* u prostoru X tako da vrijedi $indZ_i^* \leq 0$, za svaki $i \in \{1, \dots, n+1\}$.
Sada, za prostor $M^* := \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i^*$ vrijedi da je G_δ-skup u X, jer je konačna unija G_δ-skupova. Nadalje, iz Drugog teorema o dekomopoziciji slijedi $indM^* \leq n$ i vrijedi $M = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i^* = M^*$ ■

Teoremi separacije povezuju pojam separatora skupova u prostoru X s nejednakošcu $indX \leq n$. Osim što su poopćenja Prvog i Drugog teorema o separaciji za dimenziju 0, Prvi teorem separacije dat će nam odgovarajuĆe poopćenje Propozicije 1.13, u smislu da smo u Propoziciji 1.13 tražili separator točke i zatvorenog skupa koji tu točku ne sadrži, dok ćemo u Prvom teoremu separacije tražiti separator dvaju disjunktnih zatvorenih skupova.

Nadalje, Propozicija 1.13 je vrijedila u proizvoljnim regularnim prostorima, dok se ovdje ograničavamo samo na separabilne metrizabilne prostore.

Teorem 1.37 (Prvi teorem separacije) *Neka je X separabilan metrizabilan prostor i $n \in \mathbb{N}_0$. Ako je $indX \leq n$, onda, za svaki par disjunktnih zatvorenih podskupova $A, B \subseteq X$ prostora X, postoji separator L skupova A i B takav da je $indL \leq n-1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $indX \leq n$ i neka su $A, B \subseteq X$ disjunktni zatvoreni podskupovi od X. Po Prvom teoremu dekomozicije, postoje potprostori $Y, Z \subseteq X$ od X takvi da je $X = Y \cup Z$ i $indY \leq n-1$,$indZ \leq 0$. Ako je $indZ = 0$, po Drugom teoremu separacije za dimenziju 0, postoji separator L skupova A i B u X takav da je $L \cap Z = \emptyset$. Kako je X metrizabilan prostor, to je X normalan, pa, svaki par disjunktnih zatvorenih podskupova od X možemo separirati. Ako je $indZ = -1$, onda je $Z = \emptyset$, pa za proizvoljan separator L skupova A i B u prostoru X, vrijedi $Z \cap L = \emptyset$. Dakle, u svakom slučaju, postoji separator L skupova$A$ i B u prostoru X takav da je $Z \cap L = \emptyset$.

Kako je $L \subseteq X \setminus Z \subseteq Y$ to je, po Teoremu o potprostoru, $indL \leq indY = n-1$. ■

Teorem 1.38 (Drugi teorem separacije) *Neka je X metrizabilan prostor, $M \subseteq X$ separabilan potprostor od X i $n \in \mathbb{N}_0$. Ako je $indM \leq n$, onda, za svaki par disjunktnih zatvorenih podskupova $A, B \subseteq X$ prostora X, postoji separator L skupova A i B u X takav da je $ind(M \cap L) \leq n-1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $indM \leq n$ i neka su $A, B \subseteq X$ disjunktni zatvoreni podskuovi od X. Po Prvom teoremu dekomozicije, postoje potprostori $Y, Z \subseteq M$ od M takvi da je $M = Y \cup Z$,te $indY \leq n-1$ i $indZ \leq 0$. Kako

je $indZ \leq 0$, onda, kao u dokazu prethodnog teorema, postoji separator L skupova A i B u prostoru X tako da je $Z \cap L = \emptyset$.
Budući da je $M \cap L \subseteq M \cap (X \setminus Z) = M \setminus Z \subseteq Y$, to je, po Teoremu o potprostoru $ind(M \cap L) \leq indY$. ■

Lema 1.39 *Neka su X i Y topološki prostori i $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ podskupovi od X i Y redom. Tada za granicu u topološkom produktu vrijedi:*

$$Fr(U \times V) = (ClU \times FrV) \cup (FrU \times ClV)$$

Dokaz. $Fr(U \times V) = Cl(U \times V) \cap Cl\Big((X \times Y) \setminus (U \times V)\Big) =$
$= (ClU \times ClV) \cap Cl\Big[\Big((X \setminus U) \times (Y \setminus V)\Big) \cup \Big(U \times (Y \setminus V)\Big) \cup \Big((X \setminus U) \times V\Big)\Big] =$
$= \Big[(ClU \times ClV) \cap Cl\Big((X \setminus U) \times (Y \setminus V)\Big)\Big] \cup$
$\cup \Big[(ClU \times ClV) \cap Cl\Big(U \times (Y \setminus V)\Big)\Big] \cup \Big[(ClU \times ClV) \cap Cl\Big((X \setminus U) \times V\Big)\Big] =$
$= \Big[(ClU \times ClV) \cap \Big(Cl(X \setminus U) \times Cl(Y \setminus V)\Big)\Big] \cup$
$\cup \Big[(ClU \times ClV) \cap \Big(ClU \times Cl(Y \setminus V)\Big)\Big] \cup$
$\cup \Big[(ClU \times ClV) \cap \Big(Cl(X \setminus U) \times ClV\Big)\Big] =$
$= \Big[\Big(ClU \cap Cl(X \setminus U)\Big) \times \Big(ClV \cap Cl(Y \setminus V)\Big)\Big] \cup$
$\cup \Big[ClU \times \Big(ClV \cap Cl(Y \setminus V)\Big)\Big] \cup \Big[\Big(ClU \cap Cl(X \setminus U)\Big) \times ClV\Big] =$
$= (FrU \times FrV) \cup (ClU \times FrV) \cup (FrU \times ClV) =$
$= (ClU \times FrV) \cup (FrU \times ClV)$ ■

Teorem 1.40 (Teorem o produktu) *Neka su $X \neq \emptyset$ i Y separabilni metrizabilni prostori. Tada je*

$$ind(X \times Y) \leq indX + indY$$

Dokaz. Ako je $indX = \infty$ ili $indY = \infty$ tvrdnja očito vrijedi. Pa, pretpostavimo da je $k(X,Y) := indX + indY \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po $k(X,Y)$.

Ako je $k(X,Y) = -1$, onda je nužno $indX = 0$ i $indY = -1$, tj. $Y = \emptyset$. Slijedi da je $X \times Y = \emptyset$, odnosno $ind(X \times Y) = -1 = indX + indY$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi kad god je $k(X,Y) < k \geq 0$ i neka je $k(X,Y) = k$. Ako je $indY = -1$, onda je $Y = \emptyset$, pa je $indX = k+1$ i $X \times Y = \emptyset$. Dakle, $ind(X \times Y) = -1 < k = (k+1) - 1 = indX + indY$. Zato, pretpostavimo da je $indY \geq 0$. Tada postoje $n, m \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $indX = n$, $indY = m$ i $n + m = k$.
Neka je $(x,y) \in X \times Y$ proizvoljna točka i $W \subseteq X \times Y$ okolina točke (x,y) u $X \times Y$. Tada postoje okoline $U' \subseteq X$ od x u X i $V' \subseteq Y$ od y u Y, takve da je $(x,y) \in U' \times V' \subseteq W$. Kako je $indX = n$ i $indY = m$, to postoje otvoreni skupovi $U \subseteq X$ i $V \subseteq Y$ u X i Y redom, takvi da je $x \in U \subseteq U'$, $y \in V \subseteq V'$, $indFrU \leq n-1$ i $indFrV \leq m-1$.
Po prethodnoj lemi, je $Fr(U \times V) = (ClU \times FrV) \cup (FrU \times ClV) \subseteq (X \times FrV) \cup (FrU \times Y)$. Kako je $k(X, FrV) = indX + indFrV \leq n + (m-1) < k$ i $k(FrU, Y) = indFrU + indY \leq (n-1) + m < k$, to je, po pretpostavci indukcije, $ind(X \times FrV) \leq indX + indFrV \leq n + (m-1)$ i $ind(FrU \times Y) \leq indFrU + indY \leq (n-1) + m$. Skupovi $X \times FrV$ i $FrU \times Y$ su zatvoreni u $X \times Y$, pa su zatvoreni i u prostoru $(X \times FrV) \cup (FrU \times Y) \subseteq X \times Y$. Sada, po Teoremu sume, vrijedi $ind((X \times FrV) \cup (FrU \times Y)) \leq n + m - 1 = k - 1$. Po Teoremu o potprostoru, je $indFr(U \times V) \leq ind((X \times FrV) \cup (FrU \times Y)) = k - 1$. Odavde slijedi da je $ind(X \times Y) \leq k = indX + indY$. $\blacksquare$

Poglavlje 2

Velika induktivna dimenzija

2.1 Definicija i osnovna svojstva

U ovom odjeljku ćemo definirati pojam velike induktivne dimenzije. Dokazat ćemo osnovna svojstva velike induktivne dimenzije, svojevrsne analogone odgovarajućih teorema o maloj induktivnoj dimenziji. Velika induktivna dimenzija definira se za normalne prostore. Najveća razlika u odnosu na malu induktivnu dimenziju je da za veliku induktivnu dimenziju ne vrijedi Teorem o potprostoru. Kao prvo, potprostor normalnog prostora uopće ne mora biti normalan, a drugo čak i kad je potprostor normalnog prostora normalan, može se dogoditi da je velika induktivna dimenzija potprostora strogo veća od velike induktivne dimenzije prostora.

Najprije definiramo veliku induktivnu dimenziju:

Definicija 2.1 *Neka je X normalan prostor. Velika induktivna dimenzija (ili Brouwer-Čechova dimenzija) od X, u oznaci $IndX$, je element skupa $\{-1, 0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ takav da vrijedi:*

(BČ1) $IndX = -1$ ako i samo ako je $X = \emptyset$,

(BČ2) $IndX \leq n$, *za* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *ako, za svaki zatvoren skup* $A \subseteq X$ *i svaki otvoren skup* $V \subseteq X$ *takav da je* $A \subseteq V$, *postoji otvoren skup* $U \subseteq X$ *tako da je*

$$A \subseteq U \subseteq V \text{ i } IndFrU \leq n-1.$$

(BČ3) $IndX = n$, *ako je* $IndX \leq n$ *i* $IndX > n-1$, *tj. ne vrijedi* $IndX \leq n-1$.

(BČ4) $IndX = \infty$, *ako je* $IndX > n$, *za svaki* $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$.

Kao i za malu induktivnu dimenziju, za veliku induktivnu dimenziju vrijedi da je topološka invarijanta:

Lema 2.2 *Neka su* X *i* Y *homeomorfni normalni prostori i neka je* $IndX \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. *Tada je* $IndY \leq IndX$.

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po $n = IndX \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. Pretpostavimo da je $IndX = -1$. Tada je $X = \emptyset$, a kako je Y homeomorfan X, to je $Y = \emptyset$, onda je i $IndY = -1$.

Pretpostavimo da tvrdnja leme vrijedi za svaki normalan prostor velike induktivne dimenzije strogo manje od $n \geq 0$ i neka je $IndX = n$. Dokažimo da je $IndY \leq n$. Neka je $f : X \to Y$ homeomorfizam , $A \subseteq Y$ proizvoljan zatvoren skup u Y i $V \subseteq Y$ po volji odabran otvoren skup $V \subseteq Y$ u Y takav da je $A \subseteq V$. Tada je $f^{-1}(V) \subseteq X$ otvoren skup, a $f^{-1}(A) \subseteq X$ zatvoren skup u X i vrijedi $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(V)$. Kako je $IndX = n$, to postoji otvoren skup $W \subseteq X$ takav da je

$$f^{-1}(A) \in W \subseteq f^{-1}(V) \text{ i } IndFrW \leq n-1$$

. Sada je $U := f(W) \subseteq Y$ otvoren podskup od Y za koji vrijedi $A = f(f^{-1}(A)) \subseteq f(W) = U \subseteq f(f^{-1}(V)) = V$. Kako je $f\big|_{FrW} : FrW \to$

FrU homeomorfizam i $IndFrW \leq n-1$, po pretpostavci indukcije, vrijedi $IndFrU \leq n-1$. Dakle, $IndY \leq n = IndX$. ■

Teorem 2.3 *Velika induktivna dimenzija je topološka invarijanta u klasi normalnih prostora.*

Dokaz. Neka su X i Y homeomorfni normalni prostori. Ako je $IndX \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$, onda je, po prethodnoj lemi $IndY \leq IndX$. Sada je, očito, $IndY \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$, pa je, po prethodnoj lemi, $IndX \leq IndY$, odnosno $IndX = IndY$.

Pretpostavimo sada da je $IndX = \infty$ i dokažimo da je $IndY = \infty$. Kada bi $IndY = n < \infty$, onda bi, po prethodno dokazanom, vrijedilo $IndX = IndY = n$. Dakle, $IndY = \infty = IndX$. ■

Općenito, potprostor normalnog prostora ne mora biti normalan, međutim, svaki zatvoren potprostor normalnog prostora je normalan. Za zatvorenie potprostore normalnog prostora definirana je velika induktivna dimenzija i vrijedi:

Teorem 2.4 (Teorem o potprostoru za veliku induktivnu dimenziju) *Za svaki zatvoreni potprostor M normalnog prostora X, vrijedi $IndM \leq IndX$.*

Dokaz. Neka je $M \subseteq X$ zatvoreni potprostor normalnog prostora X. Pretpostavimo da je $IndX = \infty$. Tada je, očito, $IndM \leq IndX$, pa pretpostavimo da je $IndX = n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. U ovom slučaju dokaz provodimo indukcijom po $n = IndX \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$.

Neka je $IndX = -1$. Tada je $X = \emptyset$, pa je i $M = \emptyset$, a time i $IndM = -1 \leq IndX$.

Pretpostavimo da tvrdnja teorema vrijedi, za svaki prostor male induktivne dimenzije strogo manje od $n \geq 0$, i neka je $IndX = n$. Neka je $A \subseteq M$ proizvoljan zatvoren podskup od M i $V \subseteq M$ po volji odabran otvoren skup u M takav da je $A \subseteq V$. Tada postoji otvoren skup $W \subseteq X$ u X takav da je $W \cap M = V$. Kako je $M \subseteq X$ zatvoren, to je $A \subseteq X$ zatvoren i u X, pa kako je $IndX = n$ i $A \subseteq V = M \cap W \subseteq W$, to postoji otvoren podskup $U \subseteq X$ od X takav da je $A \subseteq U \subseteq W$ i $IndFrU \leq n-1$. Sada, za otvoreni podskup $M \cap U \subseteq M$ od M, vrijedi $A \subseteq U \cap M \subseteq W \cap M = V$. Po Napomeni 1.5, je $Fr_M(U \cap M) \subseteq FrU$. Skup $Fr_M(U \cap M) \subseteq M$ je zatvoren u M. Kako je $M \subseteq X$ zatvoren u X, to je $Fr_M(U \cap M)$ zatvoren i u prostoru X, pa i u prostoru FrU. Budući da je $IndFrU \leq n - 1$, to je, po pretpostavci indukcije, $IndFr_M(U \cap M) \leq IndFrU \leq n-1$. Dakle, $IndM \leq n = IndX$. ■

Teorem 2.5 *Neka je X normalan prostor i $IndX = n \in \mathbb{N}$. Tada, za svaki $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, postoji zatvoren potprostor $M_k \subseteq X$ od X takav da je $IndM_k = k$.*

Dokaz. Kao i u dokazu da svaki regularni potprostor male induktivne dimenzije n ima zatvorene potprostore male induktivne dimenzije $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, dovoljno je pokazati da postoji zatvoren potprostor $M \subseteq X$ takav da je $IndM = n - 1$.

Kako je $IndX > n - 1$, to postoji zatvoren skup $A \subseteq X$ u X i otvoren skup $V \subseteq X$ u X takav da je $A \subseteq V$ i, za svaki otvoreni skup $U \subseteq X$ takav da je $A \subseteq U \subseteq V$, je $IndFrU > n - 2$. S druge strane, jer je $IndX \leq n$, to postoji otvoren skup $W \subseteq X$ takav da je $A \subseteq W \subseteq V$ i $IndFrW \leq n - 1$. Odavde slijedi $n - 1 \geq IndFrW > n - 2$, pa je $IndFrW = n - 1$. Sada, za zatvoreni skup $M := FrW$, vrijedi $IndM = n - 1$. ■

Kao i u slučaju male induktivne dimenzije i kod velike induktivne dimenzije možemo karakterizirati nejednakost $IndX \leq n$ pomoću separatora:

Teorem 2.6 *Neka je X normalan prostor i $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tada je $IndX \leq n$ ako i samo ako, za svaki par disjunktnih zatvorenih podskupova $A, B \subseteq X$, postoji separator L skupova A i B tako da je $IndL \leq n - 1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $IndX \leq n$ i neka je $A, B \subseteq X$ proizvoljan par disjunktnih zatvorenih podskupova od X. Po jednoj od karakterizacija normalnih prostora, postoje otvoreni skupovi $V_1, V_2 \subseteq X$ u X takvi da je

$$A \subseteq V_1,\ B \subseteq V_2 \text{ i } ClV_1 \cap ClV_2 = \emptyset.$$

Kako je $IndX \leq n$, postoji otvoren skup $U \subseteq X$ u X takav da je $A \subseteq U \subseteq V_1$ i $IndFrU \leq n - 1$. Stavimo, $W =: X \setminus ClU$. Budući da je $ClU \subseteq ClV_1 \subseteq X \setminus ClV_2 \subseteq X \setminus V_2$ to, za otvorene skupove $U, W \subseteq X$ vrijedi:

$$A \subseteq U,\ B \subseteq V_2 \subseteq X \setminus ClU = W \text{ i } U \cap W = \emptyset.$$

Skup $L := X \setminus (U \cup W) = X \setminus (U \cup (X \setminus ClU)) = (X \setminus U) \cap (X \setminus (X \setminus ClU)) = ClU \setminus U = FrU$ je separator skupova A i B, te vrijedi $IndL = IndFrU \leq n - 1$.

Obratno, pretpostavimo da, za svaki par disjunktnih zatvorenih podskupova $A, B \subseteq X$, postoji separator L skupova A i B takav da je $IndL \leq n-1$. Dokažimo da je $IndX \leq n$.

Neka je $A \subseteq X$ proizvoljan zatvoren skup u X i $V \subseteq X$ po volji odabran otvoren skup $V \subseteq X$ u X takav da je $A \subseteq V$. Po pretpostavci teorema, postoji separator L skupova A i $X \setminus V$ takav da je $IndL \leq n - 1$, odnosno, postoje otvoreni skupovi $U, W \subseteq X$ takvi da je

$$A \subseteq U,\ X \setminus V \subseteq W,\ U \cap W = \emptyset \text{ i } X \setminus L = U \cup W.$$

Odavde slijedi $A \subseteq U \subseteq X \setminus W \subseteq V$. Po Napomeni 1.11, je $FrU \subseteq L$, pa je, po Teoremu o potprostoru za veliku induktivnu dimenziju, $IndFrU \leq IndL \leq n - 1$. Dakle, $IndX \leq n$. ∎

Poglavlje 3

Dimenzija pokrivanja

3.1 Definicija i osnovna svojstva

Da bismo definirali dimenziju pokrivanja, najprije, definirajmo pojam reda familije skupova.

Definicija 3.1 *Neka je* $\mathcal{A} = (A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ *familija podskupova* $A_\lambda \subseteq X$ *od* X*. Neka je* $N \subseteq \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$ *takav da je* $n \in N$ *ako i samo ako postoji* $n + 1$ *međusobno različitih članova familije* $\mathcal{A}$ *kojima je presjek neprazan.*
Red familije $\mathcal{A}$*, u oznaci* $ord\mathcal{A}$*, je maksimum skupa* N*, ako je* N *ograničen, odnosno* ∞*, ako* N *nije ograničen. U tom slučaju kažemo da je familija* $\mathcal{A}$ *beskonačnog reda.*

Uočimo sljedeće. Ako je $\mathcal{A} = (A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ familija podskupova $A_\lambda \subseteq X$ skupa X reda $ord\mathcal{A} = n$, onda, za $n + 2$ proizvoljnih međusobno različitih skupova $A_{\lambda_1}, \ldots, A_{\lambda_{n+2}}$ familije $\mathcal{A}$, vrijedi $A_{\lambda_1} \cap \cdots \cap A_{\lambda_{n+2}} = \emptyset$. Nadalje, ako je $ord\mathcal{A} = -1$, onda je $A_\lambda = \emptyset$, za svaki $\lambda \in \Lambda$. Ako je $ord\mathcal{A} = 0$, onda su svaka dva različita člana od $\mathcal{A}$ disjunktna i postoji bar jedan neprazan član. Dimenzija pokrivanja definira se pomoću pokrivača prostora. Prisjetimo se:

Kažemo da je familija $\mathcal{A} = (A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ podskupova A_λ skupa X pokrivač skupa X, ako je $X = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Za pokrivač $\mathcal{A}$ kažemo da je konačan (prebrojiv) ako je Λ konačan (prebrojiv). Ako je $\Lambda' \subseteq \Lambda$ i $X = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda$, onda kažemo da je $\mathcal{A}_0 = (A_\lambda, \lambda \in \Lambda')$ potpokrivač od $\mathcal{A}$.

Kažemo da je pokrivač $\mathcal{C} = (C_\mu, \mu \in M)$ skupa X profinjenje pokrivača $\mathcal{A} = (A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ i pišemo $\mathcal{C} \leq \mathcal{A}$, ako, za svaki $\mu \in M$, postoji $\lambda \in \Lambda$, tako da je $C_\mu \subseteq A_\lambda$.

Očito je svaki potpokrivač $\mathcal{A}_0$ od $\mathcal{A}$ ujedno i profinjenje od $\mathcal{A}$.

Definicija 3.2 *Neka je X normalan prostor. Dimenzija pokrivanja (ili Čech-Lebesgueova dimenzija) od X, u oznaci $dimX$, je element skupa $\{-1, 0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ takav da vrijedi:*

(ČL1) $dimX \leq n$, za $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$, ako svaki konačan otvoren pokrivač od X ima konačno otvoreno profinjenje reda manjeg ili jednakog n,

(ČL2) $dimX = n$, ako $dimX \leq n$ i $dimX > n-1$, tj. ne vrijedi $dimX \leq n-1$,

(ČL3) $dimX = \infty$, ako je $dimX > n$, za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$.

Primjetimo da je $dimX = -1$ ako i samo ako je $X = \emptyset$. Doista, neka je $\mathcal{X} = (X)$ jednočlan otvoren pokrivač prostora X. Jedino profinjenje tog pokrivača je sam taj pokrivač. Ako je $dimX = -1$, onda je $ord(X) \leq -1$, tj. $ord(X) = -1$, pa je $X = \emptyset$.

Obratno, ako je $X = \emptyset$, onda je svaki povrivač $\mathcal{A}$ prostora X oblika $(A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$, $A_\lambda = X = \emptyset$, za svaki $\lambda \in \Lambda$. Za svaki takav pokrivač vrijedi $ord\mathcal{A} = -1$, pa je $dimX = -1$.

Neka su $\mathcal{A}_i = (A^i_\lambda, \lambda \in \Lambda_i)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ pokrivači skupa X. Neka je

$$\mathcal{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_k := (A^1_{\lambda_1} \cap \cdots \cap A^k_{\lambda_k}, (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_k)$$

familija podskupova od X. Familija $\mathcal{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_k$ je pokrivač skupa X i profinjenje od $\mathcal{A}_i$, za svaki $i \in \{1,\ldots,k\}$. Naime, za svaku točku $x \in X$, postoje $\lambda_1 \in \Lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Lambda_k$ takvi da je $x \in A^1_{\lambda_1} \cap \cdots \cap A^k_{\lambda_k}$. Nadalje, vrijedi da je $A^1_{\mu_1} \cap \cdots \cap A^k_{\mu_k} \subseteq A^i_{\mu_i}$, za svaki $i \in \{1,\ldots,k\}$, i $\mu_j \in \Lambda_j$ $j = 1,\ldots,k$ proizvoljne.
Štoviše, ako su $\mathcal{A}_i$ otvoreni (zatvoreni) pokrivači topološkog prostora X, za svaki $i \in \{1,\ldots,k\}$, onda je i $\mathcal{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_k$ otvoren (zatvoren) pokrivač od X.
Ako je Λ_i konačan, za svaki $i \in \{1,\ldots,k\}$, onda je $\mathcal{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_k$ konačan pokrivač od X.

Neka je $\mathcal{A} = (A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ pokrivač skupa Y i $f : X \to Y$ preslikavanje. Tada je $f^{-1}(\mathcal{A}) := (f^{-1}(A_\lambda), \lambda \in \Lambda)$ pokrivač skupa X.
Ako je $\mathcal{A}$ otvoren (zatvoren) pokrivač prostora Y i $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje, onda je $f^{-1}(\mathcal{A})$ otvoren (zatvoren) pokrivač prostora X.
Ako je $\mathcal{A}$ konačan pokrivač od Y, onda je $f^{-1}(\mathcal{A})$ konačan pokrivač od X.

Neka je $M \subseteq X$ podskup skupa X i $\mathcal{A} = (A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ pokrivač od X. Tada je $(M \cap A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ pokrivač skupa M kojeg označavamo s $\mathcal{A}|M$
Ako je $ord\mathcal{A} \leq n$, onda je $ord\mathcal{A}|M \leq n$. Naime, za $n+1$ različitih članova $A_1 \cap M, \ldots, A_{n+1} \cap M$ pokrivača $\mathcal{A}|M$ skupa M vrijedi: ako je $(A_1 \cap M) \cap \cdots \cap (A_{n+1} \cap M) = (A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1}) \cap M \neq \emptyset$, onda je $A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1} \neq \emptyset$.
Ako je $\mathcal{A}$ konačan pokrivač od X, onda je $\mathcal{A}|M$ konačan pokrivač podskupa M.
Ako je $\mathcal{A}$ otvoren (zatvoren) pokrivač prostora X, onda je $\mathcal{A}|M$ otvoren (zatvoren) pokrivač potprostora M.

Lema 3.3 *Neka su X i Y homeomorfni normalni prostori i neka je $dimX \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. Tada je $dimY \leq dimX$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $dimX = n$. Dokažimo da je $dimY \leq n$.

Neka je $f : X \to Y$ homeomorfizam i $\mathcal{A} = (A_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ proizvoljan konačan otvoren pokrivač prostora Y. Tada je $f^{-1}(\mathcal{A}) := (f^{-1}(A_i), i \in \{1, \ldots, k\})$ konačan otvoren pokrivač prostora X. Kako je $dimX \leq n$, to postoji konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{B} = (B_j, j \in \{1, \ldots, m\})$ od $f^{-1}(\mathcal{A})$. Sada je $f(\mathcal{B}) = (f(B_j), j \in \{1, \ldots, m\})$ konačan otvoren pokrivač od Y. Nadalje, za proizvoljan $j \in \{1, \ldots, m\}$, postoji $i \in \{1, \ldots, k\}$ takav da je

$$f(B_j) \subseteq f(f^{-1}(A_i)) = A_i,$$

pa je $f(\mathcal{B})$ konačno otvoreno profinjenje od $\mathcal{A}$. Dakle, $dimY \leq n = dimX$. ■

Teorem 3.4 *Dimenzija pokrivanja je topološka invarijanta u klasi normalnih prostora.*

Dokaz. Neka su X i Y homeomorfni normalni prostori. Ako je $dimX \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$, onda je, po prethodnoj lemi, $dimY \leq dimX$. Sada je, očito, $dimY \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$, pa je, po prethodnoj lemi, $dimX \leq dimY$, odnosno $dimX = dimY$.

Pretpostavimo, da je $dimX = \infty$ i dokažimo da je $dimY = \infty$. Kada bi vrijedilo $dimY = n < \infty$, onda bi, po prethodno dokazanom, slijedilo $dimX = dimY = n$. Dakle, $dimY = \infty = dimX$. ■

Kao i kod velike induktivne dimenzije, svaki zatvoren potprostror M normalnog prostora X je dimenzije pokrivanja manje ili jednake dimenziji pokrivanja prostora X.

Teorem 3.5 *Neka je M zatvoren potprostor normalnog prostora X. Tada je $dimM \leq dimX$.*

Dokaz. Tvrdnja očito vrijedi ako je $dimX = \infty$. Pretpostavimo da je $dimX = n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. Neka je $\mathcal{U} = (U_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ konačan otvoren pokrivač prostora M. Za $i \in \{1, \dots, k\}$, neka je $W_i \subseteq X$ otvoren podskup od X za koji vrijedi $M \cap W_i = U_i$. Definirajmo $W_{k+1} := X \setminus M$. Familija $(W_i, i \in \{1, \dots, k+1\})$ je, očito, konačan otvoren pokrivač prostora X, pa, kako je $dimX = n$, to postoji konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{V} = (V_i, i \in \{1, \dots, m\})$ pokrivača $(W_i, i \in \{1, \dots, k+1\})$ reda $ord\mathcal{V} \leq n$. Sada je $\mathcal{V}|M$ konačan otvoren pokrivač prostora M reda manjeg ili jednakog n. Pokrivač $\mathcal{V}|M$ je profinjenje od $\mathcal{U}$. Naime, za svaki $i \in \{1, \dots, m\}$, postoji $j \in \{1, \dots, k+1\}$ takav da je $V_i \subseteq W_j$. Sada je $V_i \cap M \subseteq W_j \cap M$. Čim je $V_i \cap M \neq \emptyset$, vrijedi $j \neq k+1$. Naime, u slučaju da je $j = k+1$, slijedi $\emptyset \neq V_i \cap M \subseteq W_{k+1} \cap M = (X \setminus M) \cap M = \emptyset$. Ako je $V_i \cap M = \emptyset$, onda je $V_i \cap M \subseteq W_j \cap M$, za svaki $j \in \{1, \dots, k\}$. Dakle, za svaki $i \in \{1, \dots, m\}$, postoji $j \in \{1, \dots, k\}$ takav da je $V_i \cap M \subseteq W_j \cap M \subseteq U_j$, tj. $\mathcal{V}|M$ je konačno otvoreno profinjenje pokrivača $\mathcal{U}$ reda $ord\mathcal{V}|M \leq n$. Time smo dokazali da je $dimM \leq n = dimX$.

■

U sljedećem teoremu navest ćemo dvije korisne karakterizacije nejednakosti $dimX \leq n$. U drugoj karakterizaciji koristit će se pojam umanjenja pokrivača.

Definicija 3.6 *Za pokrivač $\mathcal{B} = (B_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ kažemo da je umanjenje pokrivača $\mathcal{A} = (A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$, ako je $B_\lambda \subseteq A_\lambda$, za svaki $\lambda \in \Lambda$.*

Napomena 3.7 *Očito je svako umanjenje $\mathcal{B}$ pokrivača $\mathcal{A}$ ujedno i profinjenje pokrivača $\mathcal{A}$. Također vrijedi $ord\mathcal{B} \leq ord\mathcal{A}$, jer $B_{\lambda_1} \cap \dots \cap B_{\lambda_n} \neq \emptyset$ povlači $A_{\lambda_1} \cap \dots \cap A_{\lambda_n} \neq \emptyset$.*

Teorem 3.8 *Neka je X normalan prostor i $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $dimX \leq n$.

(ii) Svaki konačan otvoren pokrivač prostora X ima otvoreno profinjenje reda manjeg ili jednakog n.

(iii) Svaki konačan otvoren pokrivač prostora X ima otvoreno umanjenje reda manjeg ili jednakog n.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Očito.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Neka vrijedi (ii). Dokažimo da svaki konačan otvoren pokrivač prostora X ima otvoreno umanjenje reda manjeg ili jednakog n. Neka je $(U_i, i \in \{1, \dots, k\})$ proizvoljan otvoren konačan pokrivač prostora X i neka je $\mathcal{V} = (V_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ otvoreno profinjenje od $(U_i, i \in \{1, \dots, k\})$ takvo da je $ord\mathcal{V} \leq n$. Bez gubitka općenitosti, pretpostavimo da su svi članovi pokrivača $\mathcal{V}$ međusobno različiti. Za svaki $V \in \mathcal{V}$, neka je $i(V) \in \{1, \dots, k\}$ takav da je $V \subseteq U_{i(V)}$. Takav $i(V)$ sigurno postoji, jer je $\mathcal{V}$ profinjenje od $(U_i, i \in \{1, \dots, k\})$.
Definirajmo $W_i := \bigcup\{V : i(V) = i\}$, za svaki $i \in \{1, \dots, k\}$. Tada je $(W_i, i \in \{1, \dots, k\})$ otvoreno umanjenje od $(U_i, i \in \{1, \dots, k\})$ jer je, za svaki $i \in \{1, \dots, k\}$, $W_i \subseteq U_i$. Dokažimo da je $ord(W_i, i \in \{1, \dots, k\}) \leq n$. Za svaki $i \in \{1, \dots, k\}$, neka je $\Lambda_i := \{\lambda \in \Lambda : i(V_\lambda) = i\}$. Tada je $\{\Lambda_i : i \in \{1, \dots, k\}\}$ particija od Λ.

Pretpostavimo da postoje međusobno različiti $i_1, \dots, i_{n+2} \in \{1, \dots, k\}$ takvi da su $W_{i_1}, \dots, W_{i_{n+2}}$ međusobno različiti i da je $W_{i_1} \cap \cdots \cap W_{i_{n+2}} \neq \emptyset$. Kako je $W_{i_j} = \bigcup\{V_\lambda : \lambda \in \Lambda_{i_j}\}$, to postoje $\lambda_{i_1} \in \Lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_{n+2}} \in \Lambda_{i_{n+2}}$ takvi da $V_{\lambda_{i_1}} \cap \cdots \cap V_{\lambda_{i_{n+2}}} \neq \emptyset$. Skupovi $V_{\lambda_{i_j}}$, za $j \in \{1, \dots, n+2\}$, su međusobno različiti, jer je $\{\Lambda_i : i \in \{1, \dots, k\}\}$ particija od Λ i svi članovi pokrivača $\mathcal{V}$ su međusobno različiti. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $ord\mathcal{V} \leq n$. Dakle, ne postoji $n+2$ međusobno različita članova pokrivača $\mathcal{W}$ koji imaju neprazan presjek. Odatle slijedi $ord\mathcal{W} \leq n$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Pretpostavimo da vrijedi (iii). Dokažimo da je $dimX \leq n$. Kako je svako umanjenje konačnog pokrivača, konačno profinjenje početnog pokrivača, to, za proizvoljan konačan otvoren pokrivač $\mathcal{A}$ od X, postoji konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{B}$, reda manjeg ili jednakog n, odnosno $dimX \leq n$. ■

Nejednakost $dimX \leq n$ možemo karakterizirati i činjenicom da svaki konačan otvoren pokrivač prostora X ima zatvoreno profinjenje (ili umanjenje) reda manjeg ili jednakog n. Da bismo dokazali tu karakterizaciju, potrebno je uvesti pojam uvećanja familije skupova.

Definicija 3.9 *Neka je X topološki prostor i $\mathcal{A} = (A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ familija podskupova od X. Uvećanje familije $\mathcal{A}$ je familija $\mathcal{B} = (B_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ podskupova od X , takva da vrijedi*

(i) $A_\lambda \subseteq B_\lambda$ *, za svaki* $\lambda \in \Lambda$,

(ii) $A_{\lambda_1} \cap \cdots \cap A_{\lambda_k} \neq \emptyset$ *ako i samo ako* $B_{\lambda_1} \cap \cdots \cap B_{\lambda_k} \neq \emptyset$, *za svaki konačan podskup* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} \subseteq \Lambda$.

Kažemo da je povećanje $\mathcal{B}$ otvoreno (zatvoreno), ako je $B_\lambda \subseteq X$ otvoren (zatvoren), za svaki $\lambda \in \Lambda$.

Ako je $\mathcal{B}$ uvećanje familije $\mathcal{A}$, onda očito vrijedi $ord\mathcal{A} = ord\mathcal{B}$.

Lema 3.10 *Svaki konačan otvoren pokrivač normalnog prostora ima zatvoreno umanjenje.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ konačan otvoren pokrivač normalnog prostora X. Tvrdnja je očita ako je $\mathcal{U} = (X)$. Zato pretpostavimo da $\mathcal{U}$ ima $k \geq 2$ članova. Dokaz provodimo indukcijom po k. Neka je $k = 2$, odnosno $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$. Definirajmo $A := X \setminus U_1$ i $B := X \setminus U_2$. Skupovi A i B su zatvoreni.

Nadalje, $A \cap B = (X \setminus U_1) \cap (X \setminus U_2) = X \setminus (U_1 \cup U_2) = \emptyset$, pa su A i B disjunktni. Budući da je prosotr X normalan, postoje disjunktni otvoreni skupovi $V_1, V_2 \subseteq X$, takvi da je $A \subseteq V_1$ i $B \subseteq V_2$. Definirajmo $F_1 := X \setminus V_1$ i $F_2 := X \setminus V_2$. Skupovi F_1 i F_2 su zatvoreni u X, te vrijedi $F_1 = X \setminus V_1 \subseteq X \setminus A = U_1$ i $F_2 = X \setminus V_2 \subseteq X \setminus B = U_2$. Nadalje, $F_1 \cup F_2 = (X \setminus V_1) \cup (X \setminus V_2) = X \setminus (V_1 \cap V_2) = X$. Dakle, (F_1, F_2) je zatvoreno umanjenje otvorenog pokrivača (U_1, U_2).

Pretpostavimo da, za svaki normalan prostor Y, svaki konačan otvoren pokrivač prostora Y s manje od $k > 2$ članova, ima zatvoreno umanjenje, i neka je $\mathcal{U} = (U_i, i \in \{1, \dots, k\})$ pokrivač prostora X. Definirajmo

$$U'_i := U_i, \text{ za } i \in \{1, \dots, k-2\} \text{ i } U'_{k-1} := U_{k-1} \cup U_k.$$

Po pretpostavci indukcije, konačan otvoren pokrivač $(U'_i, i \in \{1, \dots, k-1\})$ ima zatvoreno umanjenje $(F'_i, i \in \{1, \dots, k-1\})$. Skup $F'_{k-1} \subseteq X$ je zatvoren potprostor normalnog prostora X, pa je F'_{k-1} normalan prostor. Po pretpostavci indukcije, otvoren pokrivač $(F'_{k-1} \cap U_{k-1}, F'_{k-1} \cap U_k)$ prostora F'_{k-1} ima zatvoreno umanjenje (F_{k-1}, F_k). Primjetimo da su F_k, F_{k-1} zatvoreni podskupovi u X, jer su zatvoreni u zatvorenom potprostoru $F'_{k-1} \subseteq X$ od X. Za $i \in \{1, \dots, k-2\}$, neka je $F_i := F'_i$. Tvrdimo da je $(F_i, i \in \{1, \dots, k\})$ zatvoreno umanjenje pokrivača $\mathcal{U} = (U_i, i \in \{1, \dots, k\})$. Vrijedi, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i = (\bigcup\limits_{i=1}^{k-2} F_i) \cup (F_{k-1} \cup F_k) = (\bigcup\limits_{i=1}^{k-2} F'_i) \cup F'_{k-1} = X$. Nadalje, za $i \in \{1, \dots, k-2\}$, je očito $F_i \subseteq U_i$. Za $i \in \{k-1, k\}$ vrijedi $F_i \subseteq F'_{k-1} \cap U_i \subseteq U_i$. Dakle, $(F_i, i \in \{1, \dots, k\})$ je zatvoreno umanjenje pokrivača $\mathcal{U} = (U_i, i \in \{1, \dots, k\})$. ∎

Lema 3.11 *Neka je X normalan prostor i $(F_i, i \in \{1, \dots, k\})$ konačna familija zatvorenih podskupova $F_i \subseteq X$. Tada $(F_i, i \in \{1, \dots, k\})$ ima otvoreno uvećanje $(U_i, i \in \{1, \dots, k\})$. Nadalje, ako postoji familija $(V_i, i \in \{1, \dots, k\})$ otvorenih podskupova $V_i \subseteq X$, tako da vrijedi $F_i \subseteq V_i$, za svaki $i \in \{1, \dots, k\}$,* *onda* $(F_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ *ima otvoreno uvećanje* $(W_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ *takvo da je* $ClW_i \subseteq V_i$*, za svaki* $i \in \{1, \ldots, k\}$*.*

Dokaz. Neka je $E_1 := \bigcup\{F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_m} : m \in \{1, \ldots, k\}, i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, k\}, F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_m} \cap F_1 = \emptyset\}$. Skup E_1 je zatvoren, kao konačna unija zatvorenih skupova. Nadalje, $F_1 \cap E_1 = \emptyset$. Kako je X normalan prostor, to postoji otvoren skup $U_1 \subseteq X$ takav da vrijedi $F_1 \subseteq U_1$ i $ClU_1 \cap E_1 = \emptyset$. Familija $(ClU_1, F_2, \ldots, F_k)$ je uvećanje familije $(F_i, i \in \{1, \ldots, k\})$. Doista, vrijedi $F_1 \subseteq U_1 \subseteq ClU_1$ i $F_i \subseteq F_i$, za svaki $i \in \{2, \ldots, k\}$. Nadalje, neka su $i_2, \ldots, i_m \in \{2, \ldots, k\}$ po volji odabrani. Pretpostavimo da je $ClU_1 \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_m} \neq \emptyset$. Kada bi vrijedilo $F_1 \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_m} = \emptyset$, onda bi, po definiciji E_1, $F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_m}$ bio podskup od E_1. Odatle slijedi da je $ClU_1 \cap E_1 \supseteq ClU_1 \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_m} \neq \emptyset$, što je u kontradikciji s $ClU_1 \cap E_1 = \emptyset$. Obratno, ako je $F_1 \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_m} \neq \emptyset$, onda je $ClU_1 \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_m} \supseteq F_1 \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_m} \neq \emptyset$.

Pretpostavimo da smo, za svaki $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, gdje je $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq n < k$, definirali otvoreni skup $U_i \subseteq X$, tako da vrijedi $F_i \subseteq U_i$, i familija $(ClU_1, \ldots, ClU_{n-1}, F_n, \ldots, F_k)$ je uvećanje familije $(F_i, i \in \{1, \ldots, k\})$. Neka je

$$\begin{aligned} E_n := \bigcup\{ClU_{j_1} \cap \cdots \cap ClU_{j_l} \cap F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_m} : m \in \{1, \ldots, k-(n-1)\}, \\ i_1, \ldots, i_m \in \{n, \ldots, k\}, l \in \{1, \ldots, n-1\}, j_1, \ldots, j_l \in \{1, \ldots, n-1\}, \\ ClU_{j_1} \cap \cdots \cap ClU_{j_l} \cap F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_m} \cap F_n = \emptyset\}. \end{aligned}$$

Skup E_n je zatvoren u X, te vrijedi $E_n \cap F_n = \emptyset$. Kako je X normalan, postoji otvoren skup $U_n \subseteq X$ takav da je $F_n \subseteq U_n$ i $ClU_n \cap E_n = \emptyset$. Familija $(ClU_1, \ldots, ClU_{n-1}, ClU_n, F_{n+1}, \ldots, F_k)$ je uvećanje familije $(F_i, i \in \{1, \ldots, k\})$. Doista, vrijedi $F_i \subseteq U_i \subseteq ClU_i$, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nadalje, neka su $i_1, \ldots, i_m \in \{n, \ldots, k-n\}$ i $j_1, \ldots, j_l \in \{1, \ldots, n\}$ po volji odabrani.

Pretpostavimo da je $ClU_{j_1}\cap\cdots\cap ClU_{j_l}\cap F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_m}\neq\emptyset$. Ako je $j_p\neq n$, za svaki $p\in\{1,\ldots,l\}$, onda je $F_{j_1}\cap\cdots\cap F_{j_l}\cap F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_m}\neq\emptyset$, jer je familija $(ClU_1,\ldots,ClU_{n-1},F_n,\ldots,F_k)$ uvećanje familije $(F_i,i\in\{1,\ldots,k\})$. Stoga, pretpostavimo da postoji $p\in\{1,\ldots,l\}$ takav da je $j_p=n$. Bez gubitka općenitosti, pretpostavimo da je $j_l=n$. Dokažimo da je $F_{j_1}\cap\cdots\cap F_{j_{l-1}}\cap F_n\cap F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_m}\neq\emptyset$. Vrijedi $ClU_{j_1}\cap\cdots\cap ClU_{j_{l-1}}\cap F_n\cap F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_m}\neq\emptyset$. Naime, kada bi vrijedilo $ClU_{j_1}\cap\cdots\cap ClU_{j_{l-1}}\cap F_n\cap F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_m}=\emptyset$, onda bi, po definiciji E_n, vrijedilo $ClU_{j_1}\cap\cdots\cap ClU_{j_{l-1}}\cap F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_m}\subseteq E_n$. Međutim, kako je $ClU_{j_1}\cap\cdots\cap ClU_{j_{l-1}}\cap ClU_n\cap F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_m}\neq\emptyset$, to bi vrijedilo $ClU_n\cap E_n\supseteq ClU_n\cap ClU_{j_1}\cap\cdots\cap ClU_{j_{l-1}}\cap F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_m}\neq\emptyset$, što je u kontradikciji s $ClU_n\cap E_n=\emptyset$. Kako je familija $(ClU_1,\ldots,ClU_{n-1},F_n,\ldots,F_k)$ uvećanje familije $(F_i,i\in\{1,\ldots,k\})$, i $ClU_{j_1}\cap\cdots\cap ClU_{j_{l-1}}\cap F_n\cap F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_m}\neq\emptyset$, to je $F_{j_1}\cap\cdots\cap F_{j_{l-1}}\cap F_n\cap F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_m}\neq\emptyset$. Obratno, ako je $F_{j_1}\cap\cdots\cap F_{j_l}\cap F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_m}\neq\emptyset$, onda je $ClU_{j_1}\cap\cdots\cap ClU_{j_l}\cap F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_m}\supseteq F_{j_1}\cap\cdots\cap F_{j_l}\cap F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_m}\neq\emptyset$. Time smo dokazali da je familija $(ClU_1,\ldots,ClU_{n-1},ClU_n,F_{n+1},\ldots,F_k)$ uvećanje familije $(F_i,i\in\{1,\ldots,k\})$. Ponavljajući postupak, u konačno mnogo koraka, dolazimo do otvorenih skupova $U_i\subseteq X$, tako da vrijedi $F_i\subseteq U_i$, za svaki $i\in\{1,\ldots,k\}$, i familija $(ClU_i,i\in\{1,\ldots,k\})$ je uvećanje familije $(F_i,i\in\{1,\ldots,k\})$. Dokažimo da je $(U_i,i\in\{1,\ldots,k\})$ otvoreno uvećanje familije $(F_i,i\in\{1,\ldots,k\})$. Neka su $i_1,\ldots,i_m\in\{1,\ldots,k\}$ proizvoljni. Ako je $U_{i_1}\cap\cdots\cap U_{i_m}\neq\emptyset$, onda je i $ClU_{i_1}\cap\cdots\cap ClU_{i_m}\supseteq U_{i_1}\cap\cdots\cap U_{i_m}\neq\emptyset$. Kako je $(ClU_i,i\in\{1,\ldots,k\})$ uvećanje familije $(F_i,i\in\{1,\ldots,k\})$, to je $F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_m}\neq\emptyset$. Obratno, pretpostavimo da je $F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_m}\neq\emptyset$. Tada je $U_{i_1}\cap\cdots\cap U_{i_m}\supseteq F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_m}\neq\emptyset$.

Pretpostavimo da je $(V_i,i\in\{1,\ldots,k\})$ familija otvorenih podskupova $V_i\subseteq X$ tako da vrijedi $F_i\subseteq V_i$, za svaki $i\in\{1,\ldots,k\}$. Za svaki $i\in\{1,\ldots,k\}$, neka je $W_i\subseteq X$ otvoren podskup od X takav da vrijedi $F_i\subseteq$

$W_i \subseteq ClW_i \subseteq U_i \cap V_i$. Neka su $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, k\}$ proizvoljni. Ako je $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_m} \neq \emptyset$, onda je $W_{i_1} \cap \cdots \cap W_{i_m} \supseteq F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_m} \neq \emptyset$. Ako je $W_{i_1} \cap \cdots \cap W_{i_m} \neq \emptyset$, onda je $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_m} \supseteq W_{i_1} \cap \cdots \cap W_{i_m} \neq \emptyset$, pa je i $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_m} \neq \emptyset$. Time je lema u potpunosti dokazana. ■

Propozicija 3.12 *Neka je X normalan prostor i $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) *$dimX \leq n$.*

(ii) *Svaki konačan otvoren pokrivač prostora X ima zatvoreno umanjenje reda manjeg ili jednakog n.*

(iii) *Svaki konačan otvoren pokrivač prostora X ima konačno zatvoreno profinjenje reda manjeg ili jednakog n.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Pretpostavimo da je $dimX \leq n$ i neka je $(U_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ konačan otvoren pokrivač prostora X. Tada, po Teoremu 3.8, $(U_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ ima otvoreno umanjenje $(V_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ reda manjeg ili jednakog n. Po Lemi 3.10, $(V_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ ima zatvoreno umanjenje $(F_i, i \in \{1, \ldots, k\})$. Po Napomeni 3.7, vrijedi $ord(F_i, i \in \{1, \ldots, k\}) \leq n$. Kako je $F_i \subseteq V_i$, za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$, to , po prethodnoj lemi, postoji otvoreno uvećanje $(W_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ od $(F_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ takvo da je $ClW_i \subseteq V_i$, za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$. Sada, za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$, vrijedi $ClW_i \subseteq V_i \subseteq U_i$. Kako je $(F_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ pokrivač prostora X, to je i $(ClW_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ pokrivač od X. Dakle, $(ClW_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ je umanjenje pokrivača $(V_i, i \in \{1, \ldots, k\})$, pa je $ord(ClW_i, i \in \{1, \ldots, k\}) \leq n$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Očito.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Pretpostavimo da svaki konačan otvoren pokrivač prostora X ima konačno zatvoreno profinjenje reda manjeg ili jednakog n. Dokažimo da je $dimX \leq n$. Po Teoremu 3.8, dovoljno je dokazati da svaki konačan otvoren pokrivač prostora X ima konačno otvoreno profinjenje reda manjeg ili jednakog n. Neka je $(U_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ konačan otvoren pokrivač prostora X. Po (iii), postoji konačno zatvoreno profinjenje $(F_i, i \in \{1, \ldots, m\})$ pokrivača $(U_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ reda manjeg ili jednakog n. Za svaki $i \in \{1, \ldots, m\}$, neka je $j_i \in \{1, \ldots, k\}$ takav da je $F_i \subseteq U_{j_i}$. Po prethodnoj lemi, postoji otvoreno uvećanje $(W_i, i \in \{1, \ldots, m\})$ od $(F_i, i \in \{1, \ldots, m\})$ takvo da je $ClW_i \subseteq U_{j_i}$, za svaki $i \in \{1, \ldots, m\}$. Familija $(W_i, i \in \{1, \ldots, m\})$ je pokrivač prostora X jer je $(F_i, i \in \{1, \ldots, m\})$ pokrivač od X. Nadalje, vrijedi $ord(W_i, i \in \{1, \ldots, m\}) \leq n$ jer je $(W_i, i \in \{1, \ldots, m\})$ uvećanje pokrivača $(F_i, i \in \{1, \ldots, m\})$. Dakle, $(W_i, i \in \{1, \ldots, m\})$ je otvoreno profinjenje pokrivača $(U_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ reda manjeg ili jednakog n. ■

Za metrizabilne prostore vrijedi jača tvrdnja od Teorema 3.8.

Propozicija 3.13 *Neka je X metrizabilan prostor i $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) *$dimX \leq n$.*

(ii) *Svaki otvoren pokrivač prostora X ima otvoreno profinjenje reda manjeg ili jednakog n.*

U dokazu $(i) \Rightarrow (ii)$ propozicije ćemo od proizvoljnog otvorenog pokrivača $\mathcal{V}$ prostora X prvo uzeti lokalno konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{U}$, a zatim konstruirati profinjenje pokrivača $\mathcal{U}$ koje će biti reda manjeg ili jednakog n. Prisjetimo se:

Neka je X topološki prostor i $\mathcal{A}$ množina podskupova od X. Kažemo da je množina $\mathcal{A}$ lokalno konačna, ako, za svaku točku $x \in X$, postoji okolina $U \subseteq X$ točke x takva da U siječe najviše konačno mnogo elemenata množine $\mathcal{A}$.

Kažemo da je množina $\mathcal{A}$ σ-lokalno konačna (ili prebrojivo lokalno konačna), ako postoji prebrojiva familija $(\mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N})$ lokalno konačnačnih množina $\mathcal{A}_n$ podskupova od X, tako da vrijedi $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$.
Neka je $\mathcal{B} = (B_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ familija podskupova od X. Kažemo da je familija $\mathcal{B}$ lokalno konačna ako je množina $\{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ lokalno konačna.
Kažemo da je familija $\mathcal{B}$ prebrojivo lokalno konačna ako je množina $\{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ prebrojivo lokalno konačna.
Ako su svi članovi familije $\mathcal{B}$ međusobno različiti, onda je familija $\mathcal{B}$ lokalno konačna ako i samo ako, za svaku točku $x \in X$, postoji okolina $U \subseteq X$ točke x takva da U siječe najviše konačno mnogo članova familije $\mathcal{B}$.
Nadalje, ako je familija $\mathcal{B} = (B_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ lokalno konačna i za familiju $\mathcal{C} = (C_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ vrijedi

$$C_\lambda \subseteq B_\lambda, \text{ za svaki } \lambda \in \Lambda,$$

onda je familija $\mathcal{C}$ lokalno konačna. Za lokalno konačne množine vrijedi:

Lema 3.14 *Neka je $\mathcal{A} = \{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ lokalno konačna množina podskupova od X. Tada vrijedi:*

(a) Svaka podmnožina od $\mathcal{A}$ je lokalno konačna.

(b) Množina $\mathcal{B} = \{ClA_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ je lokalno konačna.

(c) $Cl(\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} ClA_\lambda$

U metrizabilnim prostorima svaki otvoren pokrivač ima otvoreno prebrojivo lokalno konačno profinjenje. Dokažimo još i da svaki otvoren pokrivač ima otvoreno lokalno konačno profinjenje.

Lema 3.15 *Neka je X metrizabilan prostor. Tada svaki otvoren pokrivač prostora X ima otvoreno lokalno konačno profinjenje.*

Dokaz. Dokaz provodimo u tri koraka. U prvom koraku dokazujemo da svaki otvoren pokrivač prostora X ima lokalno konačno profinjenje, u drugom da svaki otvoren pokrivač prostora X ima zatvoreno lokalno konačno profinjenje i naposljetku, u trećem koraku, da svaki otvoren pokrivač prostora X ima otvoreno lokalno konačno profinjenje.

1. korak

Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljan otvoren pokrivač od X. Neka je $\mathcal{A} = (A_\mu, \mu \in M)$ otvoreno σ-lokalno konačno profinjenje od $\mathcal{U}$ i neka je $(\mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N})$ prebrojiva familija lokalno konačnih množina $\mathcal{A}_n$ podskupova od X, tako da vrijedi $\{A_\mu : \mu \in M\} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$.
Za svaki $i \in \mathbb{N}$, definirajmo

$$V_i := \bigcup_{A\in\mathcal{A}_i} A,$$

i, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki $A \in \mathcal{A}_n$, definirajmo

$$S_n(A) := A \setminus \bigcup_{i<n} V_i \subseteq A$$

Neka je

$$\mathcal{B}_n = \{S_n(A) : A \in \mathcal{A}_n\}.$$

Tvrdimo da je familija $\mathcal{C} := (S_n(A), A \in \mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N})$ lokalno konačno profinjenje pokrivača $\mathcal{A}$, a time ujedno i lokalno konačno profinjenje pokrivača $\mathcal{U}$.

Neka je $x \in X$ proizvoljan i $n(x) := \min\{n \in \mathbb{N} : x \in \bigcup \mathcal{A}_n\}$ (minimum ovog skupa sigurno postoji jer je $\mathcal{A}$ pokrivač prostora X i $\{A_\mu : \mu \in M\} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$, pa je $\{n \in \mathbb{N} : x \in \bigcup \mathcal{A}_n\}$ neprazan podskup skupa $\mathbb{N}$). Tada postoji $D \in \mathcal{A}_{n(x)}$ takav da je $x \in D$. Iz definicije V_i, za $i < n(x)$ i $S_{n(x)}(D)$ slijedi $x \in S_{n(x)}(D)$. Time smo dokazali da je $\mathcal{C}$ pokrivač prostora X. Nadalje, kako je $S_n(A) \subseteq A$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki $A \in \mathcal{A}_n$, to je $\mathcal{C}$ profinjenje od $\mathcal{A}$.

Dokažimo još da je $\mathcal{C}$ lokalno konačna familija. Kako je $\mathcal{A}_n$ lokalno konačna množina, za svaki $n \in \mathbb{N}$, to, za svaki $n \in \{1, \ldots, n(x)\}$, postoji okolina W_n od x koja siječe samo konačno mnogo elemenata $\mathcal{A}_n$. Za proizvoljni $A \in \mathcal{A}_n$, ako je $W_n \cap S_n(A) \neq \emptyset$, onda je $W_n \cap A \neq \emptyset$, jer je $S_n(A) \subseteq A$. Dakle, za svaki $n \in \{1, \ldots, n(x)\}$, W_n siječe najviše konačno mnogo elemenata $\mathcal{B}_n$. Nadalje, kako je $D \in \mathcal{A}_{n(x)}$, to D ne siječe niti jedan element iz $\mathcal{B}_n$, za $n > n(x)$. Iz toga slijedi da za okolinu

$$W_1 \cap \ldots W_{n(x)} \cap D$$

točke x vrijedi da siječe samo konačno mnogo članova pokrivača $\mathcal{C}$, pa je $\mathcal{C}$, uistinu, lokalno konačno profinjenje pokrivača $\mathcal{A}$.

2. korak

Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljan otvoren pokrivač od X. Kako je X metrizabilan prostor, to je X regularan. Iz karakterizacije regularnosti 1.12, slijedi da $\mathcal{U}$ ima otvoreno profinjenje $\mathcal{V}$ tako da, za svaki član V pokrivača $\mathcal{V}$, postoji član U pokrivača $\mathcal{U}$, takav da je

$$V \subseteq ClV \subseteq U.$$

Neka je $(G_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ lokalno konačno profinjenje od $\mathcal{V}$.
Tada je $(ClG_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ zatvoreno lokalno konačno profinjenje od $\mathcal{U}$. Doista, očito je $(ClG_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ zatvoren pokrivač prostora X. Nadalje, za svaki $\gamma \in \Gamma$, postoji član V pokrivača $\mathcal{V}$ takav da je $ClG_\gamma \subseteq V$, a za V postoji član U pokrivača $\mathcal{U}$ takav da je

$$ClG_\gamma \subseteq ClV \subseteq U$$

Dakle, $(ClG_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ je zatvoreno profinjenje od $\mathcal{U}$. Kako je $(G_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ lokalno konačna familija, to je, po prethodnoj lemi, i $(ClG_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ lokalno konačna familija. Time smo dokazali da je $(ClG_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ zatvoreno lokalno konačno profinjenje od $\mathcal{U}$.

3. korak

Neka je $\mathcal{U} = (U_\alpha, \alpha \in A)$ proizvoljan otvoren pokrivač od X. Po prethodnom koraku, postoji zatvoreno lokalno konačno profinjenje $(F_\beta, \beta \in B)$ od $\mathcal{U}$. Bez gubitka općenitosti, pretpostavimo da su svi članovi pokrivača $(F_\beta, \beta \in B)$ međusobno različiti. Za svaki $x \in X$, postoji otvorena okolina W_x koja siječe najviše konačno mnogo članova pokrivača $(F_\beta, \beta \in B)$. Familija $(W_x, x \in X)$ je otvoren pokrivač od X. Po prethodnom koraku, postoji zatvoreno lokalno konačno profinjenje $(G_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ od $(W_x, x \in X)$. Očito, svaki G_γ, siječe najviše konačno mnogo članova pokrivača $(F_\beta, \beta \in B)$.

Za svaki $\beta \in B$, definirajmo

$$V_\beta := X \setminus \bigcup\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma, G_\gamma \cap F_\beta = \emptyset\}.$$

Po prethodnoj lemi, množina $\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma, G_\gamma \cap F_\beta = \emptyset\}$ je lokalno konačna i $Cl(\bigcup\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma, G_\gamma \cap F_\beta = \emptyset\}) = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma, G_\gamma \cap F_\beta = \emptyset} ClG_\gamma = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma, G_\gamma \cap F_\beta = \emptyset} G_\gamma$, pa je $\bigcup\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma, G_\gamma \cap F_\beta = \emptyset\}$ zatvoren skup, odnosno V_β otvoren skup u X, za svaki $\beta \in B$. Nadalje, vrijedi $F_\beta \subseteq V_\beta$, za svaki $\beta \in B$, pa je $(V_\beta, \beta \in B)$ otvoren pokrivač prostora X.

Dokažimo da je $(V_\beta, \beta \in B)$ lokalno konačna familija. Neka je $x \in X$ proizvoljan i W okolina od x u X koja siječe samo konačno mnogo elemenata $G_{\gamma_1}, \ldots, G_{\gamma_k}$ množine $\{G_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$. Kako je $(G_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ pokrivač prostora X, to je $W \subseteq G_{\gamma_1} \cup \cdots \cup G_{\gamma_k}$. Dakle, dovoljno je dokazati da svaki član G_γ pokrivača $(G_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ siječe konačno mnogo članova pokrivača $(V_\beta, \beta \in B)$. Ako je $G_\gamma \cap V_\beta \neq \emptyset$, onda je, po definiciji V_β, $G_\gamma \cap F_\beta \neq \emptyset$. Kako svaki G_γ siječe najviše konačno mnogo članova pokrivača $(F_\beta, \beta \in B)$, zaključujemo da svaki član G_γ pokrivača $(G_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ siječe konačno mnogo članova pokrivača $(V_\beta, \beta \in B)$.

Pokrivač $(V_\beta, \beta \in B)$ ne mora nužno biti profinjenje od $\mathcal{U}$. Kako je $(F_\beta, \beta \in B)$ profinjenje od $\mathcal{U}$, to, za svaki F_β, postoji član $U_{\alpha(\beta)}$ pokrivača $\mathcal{U}$

takav da je $F_\beta \subseteq U_{\alpha(\beta)}$. Definirajmo:

$$\mathcal{H} := (V_\beta \cap U_{\alpha(\beta)}, \beta \in B).$$

Familija $\mathcal{H}$ je lokalno konačna, jer je $V_\beta \cap U_{\alpha(\beta)} \subseteq V_\beta$, za svaki $\beta \in B$. Nadalje, $\mathcal{H}$ je pokrivač prostora X, jer, za proizvoljan $x \in X$, postoji $\beta \in B$ takav da je $x \in F_\beta \subseteq V_\beta \cap U_{\alpha(\beta)}$. Očito je $\mathcal{H}$ otvoreno profinjenje od $\mathcal{U}$. Time smo dokazali da je $\mathcal{H}$ otvoreno lokalno konačno profinjenje od $\mathcal{U}$. ■

Lema 3.16 *Neka je $\mathcal{U} = (U_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ otvoren pokrivač normalnog prostora X, $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$ i $F \subseteq X$ zatvoren podskup od X, takav da je $dimF \leq n$ i F siječe najviše konačno mnogo članova pokrivača $\mathcal{U}$. Tada postoji otvoreno umanjenje $\mathcal{V}$ od $\mathcal{U}$ takvo da vrijedi $ord(\mathcal{V}|F) \leq n$.*

Dokaz. Neka je $\Lambda' \subseteq \Lambda$ takav da je $F \cap U_\lambda \neq \emptyset$, za svaki $\lambda \in \Lambda'$, i $F \cap U_\lambda = \emptyset$, za svaki $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'$. Familija $(F \cap U_\lambda, \lambda \in \Lambda')$ je konačan otvoren pokrivač prostora F, pa, po Teoremu 3.8 , $(F \cap U_\lambda, \lambda \in \Lambda')$ ima otvoreno umanjenje $\mathcal{W} = (W_\lambda, \lambda \in \Lambda')$ reda manjeg ili jednakog n. Za svaki $\lambda \in \Lambda'$ postoji otvoren skup $W'_\lambda \subseteq X$ u X takav da je $W'_\lambda \cap F = W_\lambda$. Za svaki $\lambda \in \Lambda$, definirajmo

$$V_\lambda := (U_\lambda \setminus F) \cup (U_\lambda \cap W'_\lambda), \text{ ako je } \lambda \in \Lambda',$$

$$V_\lambda := \emptyset, \text{ ako je } \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'.$$

Tvrdimo da je $\mathcal{V} := (V_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ otvoreno umanjenje od $\mathcal{U}$ i $ord(\mathcal{V}|F) \leq n$. Očito je $V_\lambda \subseteq X$ otvoren u X, za svaki $\lambda \in \Lambda$. Dokažimo da je $\mathcal{V}$ pokrivač prostora X. Neka je $x \in X$ proizvoljan. Ako je $x \in F$, onda postoji $\lambda \in \Lambda$ takav da je $x \in W_\lambda$. Kako je $W_\lambda = F \cap W'_\lambda \subseteq W'_\lambda$ i $W_\lambda \subseteq U_\lambda$, to je

$$x \in W'_\lambda \cap U_\lambda \subseteq V_\lambda.$$

Ako vrijedi $x \notin F$, onda je, zato što postoji $\lambda \in \Lambda$ takav da je $x \in U_\lambda$, $x \in U_\lambda \setminus F \subseteq V_\lambda$. Dakle, $\mathcal{V}$ je otvoren pokrivač prostora X. Nadalje, kako je $V_\lambda \cap F = U_\lambda \cap W'_\lambda \cap F = W_\lambda$, vrijedi $ord(\mathcal{V}|F) \leq n$. ■

Korištenjem prethodne dvije leme možemo dokazati propoziciju:

Dokaz Propozicije 3.13. $(i) \Rightarrow (ii)$ Pretpostavimo da je $dimX \leq n$. Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač prostora X. Tada postoji otvoreno lokalno konačno profinjenje $\mathcal{V} = (V_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ od $\mathcal{U}$. Bez gubitka općenitosti, pretpostavimo da su svi članovi pokrivača $\mathcal{V}$ međusobno različiti. Neka je $\mathcal{T} \subseteq P(\Lambda)$ množina svih konačnih nepraznih podskupova od Λ. Za svaki $T \in \mathcal{T}$, definirajmo:

$$F_T := \left(\bigcap_{\lambda \in T} ClV_\lambda \right) \cap \left(\bigcap_{\lambda \notin T} (X \setminus V_\lambda) \right).$$

Očito je $F_T \subseteq X$ zatvoren, pa je, po Teoremu 3.5, $dimF_T \leq dimX$, za svaki $T \in \mathcal{T}$. Familija $\mathcal{F} := (F_T, T \in \mathcal{T})$ je zatvoren pokrivač prostora X. Nadalje, F_T siječe samo konačno članova pokrivača $\mathcal{V}$, za svaki $T \in \mathcal{T}$. Kako je $\mathcal{V}$ lokalno konačan, to, za svaki $x \in X$, postoji okolina W_x točke x takva da W_x siječe konačno mnogo članova pokrivača $\mathcal{V}$. Neka je $T_0 \subseteq \Lambda$ konačan podskup od Λ takav da je $W_x \cap V_\lambda = \emptyset$, za svaki $\lambda \in \Lambda \setminus T_0$. Tada je $IntW_x \cap V_\lambda \subseteq W_x \cap V_\lambda = \emptyset$, pa je i $IntW_x \cap ClV_\lambda = \emptyset$, za svaki $\lambda \in T_0$. Ako je $IntW_x \cap F_T \neq \emptyset$, onda je $T \subseteq T_0$, po definiciji od F_T. Dakle, pokrivač $\mathcal{F}$ je lokalno konačan.

Dodajmo $F_0 = \emptyset$ pokrivaču $\mathcal{F}$ i posložimo članove pokrivača u transfinitni niz $F_0, F_1, \ldots, F_\alpha, \ldots,\ \alpha \leq \epsilon$, tipa $\epsilon + 1$. Induktivno ćemo definirati transfinitni niz $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_\alpha, \ldots,\ \alpha \leq \epsilon$, otvorenih pokrivača prostora X, gdje je $\mathcal{U}_\alpha = (U^\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda)$, tako da vrijedi:

$$U^\alpha_\lambda \subseteq U^\beta_\lambda, \text{ za } \alpha > \beta \geq 0 \text{ i } U^0_\lambda \subseteq V_\lambda, \text{ za svaki } \lambda \in \Lambda, \tag{3.1}$$

$$ord(F_\alpha \cap U^\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda) \leq n, \tag{3.2}$$

$$U_\lambda^\beta \setminus U_\lambda^\alpha \subseteq \bigcup_{\beta \le \gamma \le \alpha} F_\gamma, \text{ za svaki } \beta < \alpha \text{ i za svaki } \lambda \in \Lambda. \tag{3.3}$$

Za svaki $\lambda \in \Lambda$, definirajmo $U_\lambda^0 := V_\lambda$ i $\mathcal{U}_0 := (U_\lambda^0, \lambda \in \Lambda)$. Tada za $\mathcal{U}_0$ vrijedi 3.1,3.2 i 3.3.

Pretpostavimo da smo definirali otvorene pokrivače $\mathcal{U}_\alpha$ za svaki $\alpha < \alpha_0$ tako da vrijedi 3.1,3.2 i 3.3.

Definirajmo $\mathcal{W}_{\alpha_0} := (W_\lambda^{\alpha_0}, \lambda \in \Lambda)$, gdje je

$$W_\lambda^{\alpha_0} := \bigcap_{\alpha < \alpha_0} U_\lambda^\alpha, \lambda \in \Lambda.$$

Tvrdimo da je $\mathcal{W}_{\alpha_0}$ otvoren pokrivač postora X. Ovo je očito ako α_0 ima neposrednog prethodnika , tj. ako postoji α takav da je $\alpha < \alpha_0$ i skup $\{\beta : \beta \text{ je redni broj i } \alpha < \beta < \alpha_0\}$ je prazan, jer je u tom slučaju zbog 3.1 $W_\lambda^{\alpha_0} = U_\lambda^\alpha$, za svaki $\lambda \in \Lambda$. Zato pretpostavimo da α_0 nema neposrednog prethodnika. Skup $\{\beta : \beta \text{ je redni broj i } \alpha < \beta < \alpha_0\}$ je beskonačan, za svaki $\alpha < \alpha_0$. Doista, kad bi $\{\beta : \beta \text{ je redni broj i } \alpha < \beta < \alpha_0\}$ bio konačan, onda bi postojao $\max\{\beta : \beta \text{ je redni broj i } \alpha < \beta < \alpha_0\}$ koji bi bio neposredni prethodnik od α_0. Neka je $x \in X$ proizvoljna točka. Kako je $\mathcal{F}$ lokalno konačan, to postoji okolina $U \subseteq X$ točke x koja siječe samo konačno mnogo članova pokrivača $\mathcal{F}$. Kako je $\{\beta : \beta \text{ je redni broj i } \alpha < \beta < \alpha_0\}$ beskonačan, za svaki $\alpha < \alpha_0$, to postoji redni broj β takav da je $\beta < \alpha_0$ i $U \cap F_\gamma = \emptyset$, za svaki redni broj γ, takav da je $\beta \le \gamma < \alpha_0$. Kako je $\mathcal{U}_\beta$ pokrivač prostora X, to postoji $\lambda \in \Lambda$ takav da je $x \in U_\lambda^\beta$. Iz 3.3 slijedi

$$U_\lambda^\beta \setminus U_\lambda^\alpha \subseteq \bigcup_{\beta \le \gamma \le \alpha} F_\gamma, \beta < \alpha < \alpha_0$$

Odavde slijedi da je $U_\lambda^\beta \cap U \subseteq U_\lambda^\alpha$, kad god je $\beta < \alpha < \alpha_0$, jer je $U \cap \bigcup_{\beta \le \gamma \le \alpha} F_\gamma = \emptyset$, kad god je $\beta < \alpha < \alpha_0$. Dakle, vrijedi $x \in U \cap U_\lambda^\beta \subseteq U_\lambda^\alpha$, za svaki redni broj α takav da je $\beta < \alpha < \alpha_0$. Zbog 3.1 je $x \in W_\lambda^{\alpha_0}$, pa je $\mathcal{W}_{\alpha_0}$ pokrivač prostora X. Nadalje, $W_\lambda^{\alpha_0}$ je otvoren, za svaki $\lambda \in \Lambda$, jer, za svaku točku $x \in W_\lambda^{\alpha_0} \subseteq X$, postoji otvoren skup $U \cap U_\lambda^\beta$ takav da je $x \in U \cap U_\lambda^\beta \subseteq W_\lambda^{\alpha_0}$. Dakle, $\mathcal{W}_{\alpha_0}$ je otvoren pokrivač prostora X.

Dokažimo da $\mathcal{W}_{\alpha_0}$ ima otvoreno umanjenje $\mathcal{V}_{\alpha_0}$, takvo da je $ord(\mathcal{V}_{\alpha_0}|F_{\alpha_0}) \leq n$. Primjetimo da svaki član pokrivača $\mathcal{F}$ siječe najviše konačno mnogo članova pokrivača $\mathcal{W}_{\alpha_0}$. Uistinu, kada bi F_α sjekao beskonačno mnogo članova pokrivača $\mathcal{W}_{\alpha_0}$, iz definicije $\mathcal{W}_{\alpha_0}$ bi slijedilo da F_α siječe beskonačno mnogo članova pokrivača $\mathcal{U}_0 = \mathcal{V}$. Sada, iz Leme 3.16, slijedi da postoji otvoreno umanjenje $\mathcal{V}_{\alpha_0}$ od $\mathcal{W}_{\alpha_0}$, takvo da vrijedi $ord(\mathcal{V}_{\alpha_0}|F_{\alpha_0}) \leq n$.

Za svaki $\lambda \in \Lambda$, definirajmo

$$U_\lambda^{\alpha_0} := (W_\lambda^{\alpha_0} \setminus F_{\alpha_0}) \cup V_\lambda^{\alpha_0},$$

i $\mathcal{U}_{\alpha_0} := (U_\lambda^{\alpha_0}, \lambda \in \Lambda)$. Tvrdimo da je $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ otvoren pokrivač prostora X koji zadovoljava uvjete 3.1,3.2,3.3, u slučaju $\alpha = \alpha_0$. Za svaki $\lambda \in \Lambda$, je $U_\lambda^{\alpha_0}$ otvoren i nadskup skupa $V_\lambda^{\alpha_0}$, pa je ,očito , $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ otvoren pokrivač prostora X. Neka je β proizvoljan redni broj manji od α_0 i $\lambda_0 \in \Lambda$ po volji odabran. Vrijedi, $U_{\lambda_0}^{\alpha_0} = (W_{\lambda_0}^{\alpha_0} \setminus F_{\alpha_0}) \cup V_{\lambda_0}^{\alpha_0} \subseteq W_{\lambda_0}^{\alpha_0} \subseteq U_{\lambda_0}^\beta$. Nadalje, kako je $F_{\alpha_0} \cap U_{\lambda_0}^{\alpha_0} = V_{\lambda_0}^{\alpha_0} \cap F_{\alpha_0}$ i $ord(\mathcal{V}_{\alpha_0}|F_{\alpha_0}) \leq n$, to je $ord(F_{\alpha_0} \cap U_\lambda^{\alpha_0}, \lambda \in \Lambda) \leq n$. Dakle, za $\alpha = \alpha_0$ vrijede uvjeti 3.1 i 3.2. Dokažimo da vrijedi i 3.3. Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji redni broj $\beta < \alpha_0$, $\lambda \in \Lambda$ i točka $x \in X$ tako da vrijedi $x \in U_\lambda^\beta$, $x \notin U_\lambda^{\alpha_0}$ i $x \notin \bigcup_{\beta \leq \gamma \leq \alpha_0} F_\gamma$. Posebno vrijedi $x \notin F_{\alpha_0}$, pa iz $x \notin U_\lambda^{\alpha_0}$ slijedi $x \notin W_\lambda^{\alpha_0} = \bigcap_{\alpha < \alpha_0} U_\lambda^\alpha$. Dakle, postoji redni broj $\alpha < \alpha_0$, takav da je $x \notin U_\lambda^\alpha$. Kako je $U_\lambda^\beta \subseteq U_\lambda^\gamma$, za svaki redni broj $\gamma < \beta$, i $x \in U_\lambda^\beta$, zaključujemo da je $\beta < \alpha < \alpha_0$. Sada, iz 3.3, slijedi $x \in U_\lambda^\beta \setminus U_\lambda^\alpha \subseteq \bigcup_{\beta \leq \gamma \leq \alpha} F_\gamma$. Dakle, vrijedi $x \in \bigcup_{\beta \leq \gamma \leq \alpha} F_\gamma \subseteq \bigcup_{\beta \leq \gamma \leq \alpha_0} F_\gamma$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $x \notin \bigcup_{\beta \leq \gamma \leq \alpha_0} F_\gamma$. Dakle, dokazali smo da za otvoren pokrivač $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ vrijede uvjeti 3.1,3.2 i 3.3. Time smo konstruirali traženi transfinitni niz $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_\alpha, \ldots$,

$\alpha \leq \epsilon$ otvorenih pokrivača prostora X.

Pokrivač $\mathcal{U}_\epsilon$ je umanjenje pokrivača $\mathcal{V}$, jer je $U_\lambda^\epsilon \subseteq U_\lambda^0 = V_\lambda$, za svaki $\lambda \in \Lambda$. Nadalje, za proizvoljne $k \in \mathbb{N}$ i $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \Lambda$, je $U_{\lambda_1}^\epsilon \cap \cdots \cap U_{\lambda_k}^\epsilon = (U_{\lambda_1}^\epsilon \cap \cdots \cap U_{\lambda_k}^\epsilon) \cap (\bigcup\limits_{0 \leq \alpha \leq \epsilon} F_\alpha) = \bigcup\limits_{0 \leq \alpha \leq \epsilon} (U_{\lambda_1}^\epsilon \cap \cdots \cap U_{\lambda_k}^\epsilon \cap F_\alpha) \subseteq \bigcup\limits_{0 \leq \alpha \leq \epsilon} (U_{\lambda_1}^\alpha \cap \cdots \cap U_{\lambda_k}^\alpha \cap F_\alpha)$. Kako je $ord(F_\alpha \cap U_\lambda^\alpha, \lambda \in \Lambda) \leq n$, za svaki redni broj α, takav da je $0 \leq \alpha \leq \epsilon$, to je $ord\mathcal{U}_\epsilon \leq n$. Dakle, $\mathcal{U}_\epsilon$ je otvoreno profinjenje pokrivača $\mathcal{V}$, a time i $\mathcal{U}$, reda manjeg ili jednakog n.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Očito. ■

Sljedeći teorem nam govori o tome da je za provjeru nejednakosti $dimX \leq n$ dovoljno promatrati pokrivače od X s $n+2$ međusobno različitih članova.

Teorem 3.17 *Neka je X normalan prostor i $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. Vrijedi $dimX \leq n$ ako i samo ako, svaki otvoren pokrivač $(U_i, i \in \{1, \dots, n+2\})$ od X s $n+2$ međusobno različita člana, ima otvoreno umanjenje $(W_i, i \in \{1, \dots, n+2\})$ reda manjeg ili jednakog n.*

Prije samog dokaza teorema dokazat ćemo pomoćnu lemu koju ćemo koristiti u dokazu teorema:

Lema 3.18 *Neka je $\mathcal{V} = (V_i, i \in \{1, \dots, k\})$ konačan otvoren pokrivač topološkog prostora X. Tada postoji otvoreno umanjenje $\mathcal{V}' = (V_i', i \in \{1, \dots, k\})$ od $\mathcal{V}$ takvo da, za svako otvoreno umanjenje $\mathcal{U} = (U_i, i \in \{1, \dots, k\})$ od $\mathcal{V}'$ vrijedi*

$$V_{i_1}' \cap \cdots \cap V_{i_m}' \neq \emptyset \Rightarrow U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_m} \neq \emptyset, \tag{3.4}$$

za svaki $m \in \{1, \dots, k\}$ i $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, k\}$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}(\mathcal{V}) := \{(V_i^\lambda, i \in \{1, \dots, k\}) : \lambda \in \Lambda\}$ kolekcija svih otvorenih umanjenja od $\mathcal{V}$. Ako, za svaki $\lambda \in \Lambda$ i svaki $m \in \{1, \dots, k\}$ i

$i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, k\}$, vrijedi da je $V_{i_1}^{\lambda} \cap \cdots \cap V_{i_m}^{\lambda} \neq \emptyset$, čim je $V_{i_1} \cap \cdots \cap V_{i_m} \neq \emptyset$. onda je $\mathcal{V}' := \mathcal{V}$ traženo otvoreno umanjenje od $\mathcal{V}$.

Pretpostavimo da postoje $\lambda_1 \in \Lambda$, $m_0 \in \{1, \ldots, k\}$ i $i_1^0, \ldots, i_{m_0}^0 \in \{1, \ldots, k\}$ takvi da je $V_{i_1^0}^{\lambda_1} \cap \cdots \cap V_{i_{m_0}^0}^{\lambda_1} = \emptyset$ i $V_{i_1^0} \cap \cdots \cap V_{i_{m_0}^0} \neq \emptyset$. Stavimo $\mathcal{V}_1 := (V_i^{\lambda_1}, i \in \{1, \ldots, k\})$.

Neka je sada $\mathcal{A}(\mathcal{V}_1) := \{(V_i^{\lambda}, i \in \{1, \ldots, k\}) : \lambda \in \Lambda_1 \subseteq \Lambda\} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{V})$ kolekcija svih otvorenih umanjenja od $\mathcal{V}_1$. Kako je $V_{i_1^0}^{\lambda_1} \cap \cdots \cap V_{i_m^0}^{\lambda_1} = \emptyset$, to, za svako otvoreno umanjenje $\mathcal{U} = (U_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ od $\mathcal{V}_1$ vrijedi :

$$V_{i_1^0}^{\lambda_1} \cap \cdots \cap V_{i_{m_0}^0}^{\lambda_1} \neq \emptyset \Rightarrow U_{i_1^0} \cap \cdots \cap U_{i_{m_0}^0} \neq \emptyset.$$

Ako, za svaki $\lambda \in \Lambda_1$ i svaki $m \in \{1, \ldots, k\}$ i $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, k\}$, vrijedi da je $V_{i_1}^{\lambda} \cap \cdots \cap V_{i_m}^{\lambda} \neq \emptyset$, čim je $V_{i_1}^{\lambda_1} \cap \cdots \cap V_{i_m}^{\lambda_1} \neq \emptyset$, onda je $\mathcal{V}' := \mathcal{V}_1$ traženo otvoreno umanjenje od $\mathcal{V}$.

Pretpostavimo da postoje $\lambda_2 \in \Lambda$, $m_1 \in \{1, \ldots, k\}$ i $i_1^1, \ldots, i_{m_1}^1 \in \{1, \ldots, k\}$ takvi da je $V_{i_1^1}^{\lambda_2} \cap \cdots \cap V_{i_{m_1}^1}^{\lambda_2} = \emptyset$ i $V_{i_1^1}^{\lambda_1} \cap \cdots \cap V_{i_{m_1}^1}^{\lambda_1} \neq \emptyset$. Stavimo $\mathcal{V}_2 := (V_i^{\lambda_2}, i \in \{1, \ldots, k\})$. Očito vrijedi $\{i_1^1, \ldots, i_{m_1}^1\} \neq \{i_1^0, \ldots, i_{m_0}^0\}$ jer je $V_{i_1^1} \cap \cdots \cap V_{i_{m_1}^1} \neq \emptyset$ i $V_{i_1^0}^{\lambda_1} \cap \cdots \cap V_{i_{m_0}^0}^{\lambda_1} = \emptyset$.
Kako je $\mathcal{V}_2$ umanjenje od $\mathcal{V}_1$, to je $V_{i_1^0}^{\lambda_2} \cap \cdots \cap V_{i_{m_0}^0}^{\lambda_2} \subseteq V_{i_1^0}^{\lambda_1} \cap \cdots \cap V_{i_{m_0}^0}^{\lambda_1} = \emptyset$. Nadalje, vrijedi $V_{i_1^1}^{\lambda_2} \cap \cdots \cap V_{i_{m_1}^1}^{\lambda_2} = \emptyset$, pa, za svako otvoreno umanjenje $\mathcal{U} = (U_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ od $\mathcal{V}_2$ vrijedi :

$$V_{i_1^0}^{\lambda_2} \cap \cdots \cap V_{i_{m_0}^0}^{\lambda_2} \neq \emptyset \Rightarrow U_{i_1^0} \cap \cdots \cap U_{i_{m_0}^0} \neq \emptyset,$$

$$V_{i_1^1}^{\lambda_2} \cap \cdots \cap V_{i_{m_1}^1}^{\lambda_2} \neq \emptyset \Rightarrow U_{i_1^1} \cap \cdots \cap U_{i_{m_1}^1} \neq \emptyset.$$

Kako je $\{1, \ldots, k\}$ konačan, to postoji samo konačno mnogo izbora za $m \in \{1, \ldots, k\}$ i $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, k\}$. Dakle, u konačno mnogo koraka, ponavljajući gornji postupak možemo doci do otvorenog umanjenja $\mathcal{V}' = (V_i', i \in \{1, \ldots, k\})$ od $\mathcal{V}$ takvog da, za svako otvoreno umanjenje $\mathcal{U} = (U_i, i \in$

$\{1,\ldots,k\})$ od $\mathcal{V}'$ vrijedi :

$$V'_{i_1}\cap\cdots\cap V'_{i_m}\neq\emptyset\Rightarrow U_{i_1}\cap\cdots\cap U_{i_m}\neq\emptyset,$$

za svaki $m\in\{1,\ldots,k\}$ i $i_1,\ldots,i_m\in\{1,\ldots,k\}$. ∎

Dokaz teorema 3.17 . Pokažimo da svaki normalan prostor X takav da je $dimX>n$ ima otvoren pokrivač $(U_i, i\in\{1,\ldots,n+2\})$ s $n+2$ međusobno različita člana takav da, za svako otvoreno umanjenje $(W_i, i\in\{1,\ldots,n+2\})$ od $(U_i, i\in\{1,\ldots,n+2\})$, vrijedi $\bigcap\limits_{i=1}^{n+2}W_i\neq\emptyset$. Neka je $dimX>n$. Po Teoremu 3.8, postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{V}=(V_i, i\in\{1,\ldots,k\})$ od X koji nema otvoreno profinjenje reda manjeg ili jednakog n. Tada $\mathcal{V}$ nema ni otvoreno umanjenje reda manjeg ili jednakog n. Bez gubitka općenitosti, pretpostavimo da su svi članovi od $\mathcal{V}$ međusobno različiti.

Po prethodnoj lemi, $\mathcal{V}$ ima otvoreno umanjenje $\mathcal{V}'=(V'_i, i\in\{1,\ldots,k\})$ takvo da, za svako otvoreno umanjenje $\mathcal{U}=(U_i, i\in\{1,\ldots,k\})$ od $\mathcal{V}'$ vrijedi:

$$V'_{i_1}\cap\cdots\cap V'_{i_m}\neq\emptyset\Rightarrow U_{i_1}\cap\cdots\cap U_{i_m}\neq\emptyset,$$

za svaki $m\in\{1,\ldots,k\}$ i $i_1,\ldots,i_m\in\{1,\ldots,k\}$.

Kako $\mathcal{V}$ nema otvoreno umanjenje reda manjeg ili jednakog n, to je $ord\mathcal{V}'>n$. Odavde slijedi da postoje $i_1,\ldots,i_{n+2}\in\{1,\ldots,k\}$ takvi su $V'_{i_1},\ldots,V'_{i_{n+2}}$ međusobno različiti i da je

$$\bigcap_{j=1}^{n+2}V'_{i_j}\neq\emptyset.$$

Bez gubitka općenitosti, možemo pretpostaviti

$$\bigcap_{i=1}^{n+2}V'_i\neq\emptyset.$$

Za $i\in\{1,\ldots,k\}$, neka je

$$U_i:=\begin{cases}V'_i, & i\in\{1,\ldots,n+1\}\\ \bigcup\limits_{j=n+2}^{k}V'_j, & i=n+2.\end{cases}$$

Familija $(U_i, i \in \{1, \ldots, n+2\})$ je otvoreni pokrivač prostora X jer je $(V'_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ otvoreni pokrivač od X. Nadalje, vrijedi $U_{n+2} \neq U_i$, za svaki $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, jer bi, u suprotnom, $(U_i, i \in \{1, \ldots, n+1\})$ bilo otvoreno profinjenje od $\mathcal{V}$ takvo da je $ord(U_i, i \in \{1, \ldots, n+1\}) \leq n$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da $\mathcal{V}$ nema takvih otvorenih profinjenja. Dakle, članovi pokrivača $(U_i, i \in \{1, \ldots, n+2\})$ su svi međusobno različiti.

Tvrdimo da, za svako otvoreno umanjenje $(W_i, i \in \{1, \ldots, n+2\})$ od $(U_i, i \in \{1, \ldots, n+2\})$, vrijedi $\bigcap\limits_{i=1}^{n+2} W_i \neq \emptyset$. Neka je $(W_i, i \in \{1, \ldots, n+2\})$ otvoreno umanjenje od $(U_i, i \in \{1, \ldots, n+2\})$.

Otvoreni pokrivač

$$(W_1, W_2, \ldots, W_{n+1}, W_{n+2} \cap V'_{n+2}, W_{n+2} \cap V'_{n+3}, \ldots, W_{n+2} \cap V'_k)$$

prostora X je otvoreno umanjenje pokrivača $\mathcal{V}'$. Budući da je

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} V'_i \neq \emptyset,$$

to je i

$$(\bigcap_{i=1}^{n+1} W_i) \cap (W_{n+2} \cap V_{n+2}) \neq \emptyset,$$

a odavde slijedi

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} W_i \supseteq (\bigcap_{i=1}^{n+1} W_i) \cap (W_{n+2} \cap V_{n+2}) \neq \emptyset.$$

Dokažimo sada tvrdnju teorema.

Pretpostavimo da je $dimX \leq n$ i neka je $(U_i, i \in \{1, \ldots, n+2\})$ proizvoljan otvoren pokrivač od X. Po Teoremu 3.8, postoji otvoreno umanjenje $(W_i, i \in \{1, \ldots, n+2\})$ od $(U_i, i \in \{1, \ldots, n+2\})$ reda manjeg ili jednakog n.

Obratno, pretpostavimo da, za svaki otvoren pokrivač $(U_i, i \in \{1, \ldots, n+2\})$ čiji su članovi međusobno različiti, postoji otvoreno umanjenje $(W_i, i \in$

$\{1,\ldots,n+2\}$) od $(U_i, i \in \{1,\ldots,n+2\})$ reda manjeg ili jednakog n. Kada bi vrijedilo $dimX > n$, onda bi, po prethodno dokazanom, vrijedilo da postoji otvoren pokrivač $(U_i, i \in \{1,\ldots,n+2\})$ s $n+2$ međusobno različita člana takav da, za svako otvoreno umanjenje $(W_i, i \in \{1,\ldots,n+2\})$ od $(U_i, i \in \{1,\ldots,n+2\})$ vrijedi $\bigcap\limits_{i=1}^{n+2} W_i \neq \emptyset$. Odavde bi slijedilo $ord(W_i, i \in \{1,\ldots,n+2\}) \geq n+1 > n$, čime bismo došli do kontradikcije. Dakle, $dimX \leq n$. ■

3.2 Teorem sume za dimenziju pokrivanja

U ovom odjeljku ćemo dokazati Teorem sume za dimenziju pokrivanja. Teorem je analogan Teoremu sume za malu induktivnu dimenziju, međutim Teorem sume za dimenziju pokrivanja vrijedi za svaki normalan prostor. U tu svrhu, najprije definirajmo pojam relativne dimenzije pokrivanja:

Definicija 3.19 *Neka je $A \subseteq X$ potprostor normalnog prostora X. Relativna dimenzija pokrivanja od A, u oznaci $rd_X A$ je*

$$rd_X A := sup\{dimF : F \subseteq A \text{ i } F \subseteq X \text{ je zatvoren u } X\}$$

Neka je $A \subseteq X$ normalan potprostor normalnog prostora X. Tada vrijedi $rd_X A \leq dimA$. Doista, neka je F proizvoljan zatvoren podskup od X, za koji vrijedi $F \subseteq A$. Tada je F zatvoren i u A, pa iz Teorema 3.5 slijedi $dimF \leq dimA$. Dakle, $rd_X A = sup\{dimF : F \subseteq A$ i $F \subseteq X$ je zatvoren u $X\} \leq dimA$.

Ako je $A \subseteq X$ zatvoren u X, onda, očito, vrijedi $rd_X A = dimA$.

Lema 3.20 *Neka je X normalan prostor i $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. Ako svaki konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U} = (U_i, i \in \{1,\ldots,k\})$ prostora X, za koji vrijedi*

$$U_i \neq U_j \Rightarrow ClU_i \neq ClU_j, \text{ za svaki } i, j \in \{1,\ldots,k\},$$

ima konačno otvoreno profinjenje reda manjeg ili jednakog n*, onda je* $dim X \leq n$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{U} = (U_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ konačan otvoren pokrivač prostora X. Dokažimo da $\mathcal{U}$ ima otvoreno profinjenje $\mathcal{V}$ takvo da vrijedi $V_i \neq V_j \Rightarrow ClV_i \neq ClV_j$, za svaki $i, j \in \{1, \ldots, k\}$.

Po Lemi 3.10, $\mathcal{U}$ ima zatvoreno umanjenje $(F_i, i \in \{1, \ldots, k\})$. Po Lemi 3.11, postoji otvoreno uvećanje $(W_i^1, i \in \{1, \ldots, k\})$ pokrivača $(F_i, i \in \{1, \ldots, k\})$, tako da vrijedi $F_i \subseteq W_i^1 \subseteq ClW_i^1 \subseteq U_i$, za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$. Ako vrijedi $W_i^1 \neq W_j^1 \Rightarrow ClW_i^1 \neq ClW_j^1$, za svaki $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, onda je $\mathcal{V} := (W_i^1, i \in \{1, \ldots, k\})$ traženo otvoreno profinjenje. Stoga, pretpostavimo da postoje $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ takvi da je $W_i^1 \neq W_j^1$ i $ClW_i^1 = ClW_j^1$. Na skupu $\{1, \ldots, k\}$ definirajmo relaciju $\sim$ pravilom

$$i \sim j \iff ClW_i^1 = ClW_j^1,\ i, j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Relacija $\sim$ je, očito, relacija ekvivalencije, pa inducira particiju na $\{1, \ldots, k\}$. Neka su $i_1, \ldots, i_{k_1}$ reprezentanti klasa ekvivalencije relacije $\sim$. Tada je $(ClW_{i_l}^1, l \in \{1, \ldots, k_1\})$ profinjenje od $\mathcal{U}$. Primjetimo da je $k_1 < k$. Kako je $(ClW_{i_l}^1, l \in \{1, \ldots, k_1\})$ zatvoren pokrivač prostora X, to, po Lemi 3.11 , postoji otvoreno uvećanje $(W_{i_l}^2, l \in \{1, \ldots, k_1\})$ od $(ClW_{i_l}^1, l \in \{1, \ldots, k_1\})$, tako da vrijedi $ClW_{i_l}^1 \subseteq W_{i_l}^2 \subseteq ClW_{i_l}^2 \subseteq U_{i_l}$, za svaki $l \in \{1, \ldots, k_1\}$. Ako vrijedi $W_i^2 \neq W_j^2 \Rightarrow ClW_i^2 \neq ClW_j^2$, za svaki $i, j \in \{i_1, \ldots, i_{k_1}\}$, onda je $\mathcal{V} := (W_i^2, i \in \{1, \ldots, k\})$ traženo otvoreno profinjenje. U suprotnom, analognim postupkom dolazimo do otvorenog profinjenja $(W_i^3, i \in \{1, \ldots, k_2\})$ pokrivača $\mathcal{U}$ takvog da je $k_2 < k_1 < k$. U konačno mnogo koraka,ponavljajući gornji postupak, dolazimo do otvorenog profinjenja $\mathcal{V} = (V_i, i \in \{1, \ldots, m\})$ pokrivača $\mathcal{U}$ takvog da vrijedi $V_i \neq V_j \Rightarrow ClV_i \neq ClV_j$, za svaki $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Po pretpostavci leme, $\mathcal{V}$ ima konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{W}$

reda manjeg ili jednakog n. Pokrivač $\mathcal{W}$ je konačno otvoreno profinjenje pokrivača $\mathcal{U}$ reda manjeg ili jednakog n, pa iz Teorema 3.8 slijedi $dimX \leq n$.

■

Lema 3.21 *Neka je X normalan prostor, $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$ i $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz potprostora $K_i \subseteq X$, prostora X, takvih da vrijedi $rd_X K_i \leq n$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Ako je skup $\bigcup\limits_{j=1}^{i} K_j$ zatvoren u X ,za svaki $i \in \mathbb{N}$, i $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} K_i = X$, onda je $dimX \leq n$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U} = (U_j, j \in \{1, \ldots, k\})$ konačan otvoren pokrivač prostora X za koji vrijedi

$$U_i \neq U_j \Rightarrow ClU_i \neq ClU_j, \text{ za svaki } i, j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Bez gubitka općenitosti, pretpostavimo da su svi članovi od $\mathcal{U}$ međusobno različiti. Neka je $F_i := \bigcup\limits_{j=1}^{i} K_j$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, i $F_0 := \emptyset$. Rekurzivno ćemo definirati niz $(\mathcal{U}_i = (U_{i,j}, j \in \{1, \ldots, k\}))_{i\in\mathbb{N}_0}$ otvorenih pokrivača prostora X, tako da vrijedi

$$ClU_{i,j} \subseteq U_{i-1,j}, \text{ za svaki } i \in \mathbb{N} \text{ i } U_{0,j} \subseteq U_j, \text{ za svaki } j \in \{1, \ldots, k\}, \quad (3.5)$$

$$ord(F_i \cap ClU_{i,j}, j \in \{1, \ldots, k\}) \leq n, \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.6)$$

Za $i = 0$, stavimo $U_{0,j} := U_j$, za svaki $j \in \{1, \ldots, k\}$. Tada su ,za $i = 0$, ispunjeni uvjeti 3.5 i 3.6. Pretpostavimo da smo definirali otvorene pokrivače $\mathcal{U}_i$ tako da vrijedi 3.5 i 3.6, za svaki $i \in \mathbb{N}_0, i < m \geq 1$. Neka je $\mathcal{T} := \{T \subseteq \{1, \ldots, k\} : \mathbf{card}T = n + 2\}$. Definirajmo $A := \bigcup\limits_{T\in\mathcal{T}} \bigcap\limits_{j\in T} ClU_{m-1,j}$. Primjetimo da je A zatvoren skup u X. Kako je $ord(F_{m-1} \cap ClU_{m-1,j}, j \in \{1, \ldots, k\}) \leq n$, to je $F_{m-1} \cap A = \emptyset$. Naime, kada bi vrijedilo $F_{m-1} \cap A \neq \emptyset$, onda bi, po definiciji od A, postojao $T \in \mathcal{T}$ takav da je $\bigcap\limits_{j\in T}(ClU_{m-1,j} \cap F_{m-1}) = (\bigcap\limits_{j\in T} ClU_{m-1,j}) \cap F_{m-1} \neq \emptyset$. Skup $Z := F_m \cap A$ je zatvoren podskup prostora X, te vrijedi $Z = F_m \cap A \subseteq F_m \cap (X \setminus F_{m-1}) = F_m \setminus F_{m-1} \subseteq K_m$. Kako je $rd_x K_m \leq n$, to je $dim Z \leq n$. Po Lemi 3.16, pokrivač $\mathcal{U}_{m-1}$ ima otvoreno umanjenje $\mathcal{V} = (V_j, j \in \{1, \ldots, k\})$, takvo da je $ord(\mathcal{V}|Z) \leq n$. Tvrdimo da je $ord(F_m \cap V_j, j \in \{1, \ldots, k\}) \leq n$. Neka su $j_1, \ldots, j_{n+2} \in \{1, \ldots, k\}$ takvi da su $V_{j_1} \cap F_m, \ldots, V_{j_{n+2}} \cap F_m$ međusobno različiti. Tada su $U_{j_1}, \ldots, U_{j_{n+2}}$ međusobno različiti, pa su i $ClU_{j_1}, \ldots, ClU_{j_{n+2}}$ međusobno različiti. Tada je $\bigcap\limits_{l=1}^{n+2}(F_m \cap V_{j_l}) = (\bigcap\limits_{l=1}^{n+2} V_{j_l}) \cap F_m = (\bigcap\limits_{l=1}^{n+2} V_{j_l}) \cap (\bigcap\limits_{l=1}^{n+2} ClU_{m-1,j_l}) \cap F_m$. Vrijedi $\bigcap\limits_{l=1}^{n+2}(F_m \cap V_{j_l}) = (\bigcap\limits_{l=1}^{n+2} V_{j_l}) \cap (\bigcap\limits_{l=1}^{n+2} ClU_{m-1,j_l}) \cap F_m = \emptyset$. Naime, vrijedi $\{j_1, \ldots, j_{n+2}\} \in \mathcal{T}$, pa je $\bigcap\limits_{l=1}^{n+2} ClU_{m-1,j_l} \subseteq A$. Kako je $ord(\mathcal{V}|Z) \leq n$, to je $Z \cap (\bigcap\limits_{l=1}^{n+2} V_{j_l}) = \emptyset$, pa je $(\bigcap\limits_{l=1}^{n+2} V_{j_l}) \cap (\bigcap\limits_{l=1}^{n+2} ClU_{m-1,j_l}) \cap F_m \subseteq (\bigcap\limits_{l=1}^{n+2} V_{j_l}) \cap A \cap F_m = (\bigcap\limits_{l=1}^{n+2} V_{j_l}) \cap Z = \emptyset$.

Po Lemi 3.10, postoji otvoreno umanjenje $\mathcal{U}'_m = (U'_{m,j}, j \in \{1, \ldots, k\})$ pokrivača $\mathcal{V} = (V_j, j \in \{1, \ldots, k\})$. Kako je X normalan, to postoji otvoreno umanjenje $\mathcal{U}_m = (U_{m,j}, j \in \{1, \ldots, k\})$ pokrivača $\mathcal{V} = (V_j, j \in \{1, \ldots, k\})$, tako da vrijedi $U'_{m,j} \subseteq U_{m,j} \subseteq ClU_{m,j} \subseteq V_j$, za svaki $j \in \{1, \ldots, k\}$. Vrijedi $ClU_{m,j} \subseteq V_j \subseteq U_{m-1,j}$, za svaki $j \in \{1, \ldots, k\}$. Nadalje, vrijedi $ord(F_m \cap ClU_{m,j}, j \in \{1, \ldots, k\}) \leq n$ jer je $(F_m \cap ClU_{m,j}, j \in \{1, \ldots, k\})$ umanjenje pokrivača $ord(\mathcal{V}|F_m)$. Dakle, pokrivač $\mathcal{U}_m$ zadovoljava uvjete 3.5 i 3.6 za $i = m$. Time smo konstruirali otvorene pokrivače $\mathcal{U}_i$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Neka je $x \in X$ proizvoljna točka. Tada postoji $j(x) \in \{1, \ldots, k\}$ takav da $x \in U_{i,j(x)}$ za beskonačno mnogo $i \in \mathbb{N}$. Iz 3.5 slijedi $x \in \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} ClU_{i,j(x)}$. Time smo dokazali da je familija $(\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} ClU_{i,j}, j \in \{1, \ldots, k\})$ pokrivač prostora X. Nadalje, iz 3.5 slijedi da je $(\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} ClU_{i,j}, j \in \{1, \ldots, k\})$ umanjenje pokrivača $\mathcal{U}$. Dokažimo da vrijedi $ord(\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} ClU_{i,j}, j \in \{1, \ldots, k\}) \leq n$. Neka su $j_1, \ldots, j_{n+2} \in \{1, \ldots, k\}$ takvi da su $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} ClU_{i,j_l}, l \in \{1, \ldots, n+2\}$, međusobno različiti. Pretpostavimo da je $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\bigcap_{l=1}^{n+2} ClU_{i,j_l} \neq \emptyset$, tj neka postoji $x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}}\bigcap_{l=1}^{n+2} ClU_{i,j_l}$. Kako je $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$, to postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in F_m$. Sada je $x \in (\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\bigcap_{l=1}^{n+2} ClU_{i,j_l}) \cap F_m \subseteq (\bigcap_{l=1}^{n+2} ClU_{m,j_l}) \cap F_m$. Kako su svi ClU_{m,j_l}, $l \in \{1,\dots,n+2\}$, međusobno različiti, to iz 3.6 slijedi $(\bigcap_{l=1}^{n+2} ClU_{m,j_l}) \cap F_m = \emptyset$, što je u kontradikciji s $x \in (\bigcap_{l=1}^{n+2} ClU_{m,j_l}) \cap F_m$. Dakle, $ord(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} ClU_{i,j}, j \in \{1,\dots,k\}) \leq n$. Iz Leme 3.20 slijedi $dimX \leq n$. ∎

Teorem 3.22 (Teorem sume za dimenziju pokrivanja) *Neka je X normalan prostor, $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$ i $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz zatvorenih potprostora $F_i \subseteq X$, prostora X, tako da vrijedi $dimF_i \leq n$, za svaki $i \in \mathbb{N}$ i $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$. Tada je $dimX \leq n$.*

Dokaz. Uočimo da je $rd_X F_i = dimF_i \leq n$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Kako je $\bigcup_{j=1}^{i} F_j$ zatvoren u X , za svaki $i \in \mathbb{N}$, to iz prethodne leme slijedi $dimX \leq n$. ∎

3.3 Dimenzija pokrivanja u kompaktnim metrizabilnim prostorima

Prisjetimo se da za topološki prostor X kažemo da je kompaktan ako svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od X ima konačan otvoren potpokrivač, ili ekvivalentno ako svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od X ima konačno otvoreno profinjenje.

Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq X$. Ako je A omeđen skup u X , tj. ako postoji $M > 0$ takav da je $d(a, a') \leq M$, za svaki $a, a' \in A$, onda postoji nenegativan realan broj $\sup\{d(a, a') : a, a' \in A\}$ kojeg nazivamo dijametrom skupa A i označavamo s $diamA$. Ako $A \subseteq X$ nije omeđen skup u X, onda stavljamo $diamA = \infty$.

Definicija 3.23 *Neka je $\mathcal{A}$ množina podskupova metričkog prostora (X, d). Očica množine $\mathcal{A}$ u oznaci mesh$\mathcal{A}$ je nenegativan realan broj* $\sup\{diamA : A \in \mathcal{A}\}$, *ako je skup $\{diamA : A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathbb{R}$ omeđen, odnosno mesh$\mathcal{A} = \infty$, ako je skup $\{diamA : A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathbb{R}$ ne omeđen.*
Neka je $\mathcal{B} = (B_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ familija podskupova prostora X. Očica familije $\mathcal{B}$ u oznaci mesh$\mathcal{B}$ je očica množine $\{B_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$

Napomena 3.24 *Neka je $M \subseteq X$ potprostor metričkog prostora X, $\mathcal{A} = (A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ pokrivač od X i $\epsilon > 0$ proizvoljan. Ako je mesh$\mathcal{A} < \epsilon$, onda je mesh$\mathcal{A}|M < \epsilon$.*

Definicija 3.25 *Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $\mathcal{U} = (U_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ pokrivač od X. Lebesgueov broj pokrivača $\mathcal{U}$ je pozitivan realan broj ϵ takav da, za svaki podskup $A \subseteq X$ za koji je $diamA < \epsilon$, postoji $\lambda \in \Lambda$ takav da je $A \subseteq U_\lambda$.*

Lebesgueov broj pokrivača nije jedinstven. Naime, ako je ϵ Lebesgueov broj pokrivača $\mathcal{U}$ metričkog prostora (X, d), onda je svaki ϵ', $0 < \epsilon' < \epsilon$ također Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$. Općenito, Lebesgueov broj pokrivača ne mora nužno postojati, međutim u kompaktnim metričkim prostorima vrijedi:

Teorem 3.26 *Neka je (X, d) kompaktni metrički prostor. Tada svaki otvoren pokrivač od X ima Lebesgueov broj.*

Teorem 3.27 *Neka je X metrizabilan kompaktan prostor i $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $dimX \leq n$.

(ii) Za svaku metriku d koja metrizira topologiju na X i svaki $\epsilon > 0$, postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X takav da je mesh$\mathcal{U} < \epsilon$ i ord$\mathcal{U} \leq n$.

(iii) Postoji metrika d koja metrizira topologiju na prostoru X takva da, za svaki $\epsilon > 0$, postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X takav da je $mesh\mathcal{U} < \epsilon$ i $ord\mathcal{U} \leq n$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Pretpostavimo da vrijedi $dimX \leq n$. Neka je d proizvoljna metrika koja metrizira topologiju na X i $\epsilon > 0$ po volji odabran. Promotrimo otvoren pokrivač $(B(x, \frac{\epsilon}{3}), x \in X)$ prostora X gdje je $B(x, \frac{\epsilon}{3}) = \{y \in X : d(x, y) < \frac{\epsilon}{3}\}$ kugla u metričkom prostoru (X, d). Kako je X kompaktan, ovaj otvoren pokrivač ima konačan potpokrivač $(B(x_i, \frac{\epsilon}{3}), i \in \{1, \ldots, k\})$, a kako je $dimX \leq n$, to $(B(x_i, \frac{\epsilon}{3}), i \in \{1, \ldots, k\})$ ima konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{U}$ reda $ord\mathcal{U} \leq n$. Nadalje, kako je $diamB(x, \frac{\epsilon}{3}) \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$, to je $mesh\mathcal{U} < \epsilon$. Dakle, vrijedi (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Očito.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Neka je d metrika koja metrizira topologiju na prostoru X takva da, za svaki $\epsilon > 0$, postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X takav da je $mesh\mathcal{U} < \epsilon$ i $ord\mathcal{U} \leq n$. Dokažimo da je $dimX \leq n$. Neka je $(U_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ proizvoljan konačan otvoren pokrivač prostora X. Kako je X kompakatan, to postoji Lebesgueov broj $\epsilon > 0$ pokrivača $(U_i, i \in \{1, \ldots, k\})$. Sada, po (iii), za taj $\epsilon > 0$, postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X takav da je $mesh\mathcal{U} < \epsilon$ i $ord\mathcal{U} \leq n$. Pokrivač $\mathcal{U}$ je očito profinjenje od $(U_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ jer je $mesh\mathcal{U} < \epsilon$. Dakle, $dimX \leq n$. ∎

Poglavlje 4

Teorem kompaktifikacije i relacije između dimenzija

U ovom poglavlju dokazat ćemo Teorem kompaktifikacije pomoću kojega ćemo dokazati da se u klasi separabilnih metrizabilnih prostora poklapaju mala induktivna dimenzija, velika induktivna dimenzija i dimenzija pokrivanja. Osim toga, u ovom poglavlju ćemo pokazati kakve relacije vrijede između tih dimenzija u općenitijim klasama prostora.

4.1 Relacije između male i velike induktivne dimenzije

Sljedeći teorem opravdava nazive velike i male induktivne dimenzije:

Teorem 4.1 *Neka je X normalni prostor. Tada je $indX \leq IndX$.*

Dokaz. Ako je $IndX = \infty$, tvrdnja teorema očito vrijedi. Pretpostavimo da je $IndX \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$. U ovom slučaju dokaz provodimo indukcijom po $n = IndX \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$.

Za $IndX = -1$ je $X = \emptyset$, pa je $indX = -1 \leq IndX$.
Pretpostavimo da, za svaki normalni prostor Y velike induktivne dimenzije $IndY$ strogo manje od n, vrijedi $indY \leq IndY$ i neka je $IndX = n$. Dokažimo da je $indX \leq n$. Neka je $x \in X$ proizvoljna točka i $V \subseteq X$ po volji odbarana okolina od x u X. Kako je $IndX = n$, to, za zatvoreni skup $\{x\} \subseteq X$ u X i otvoreni skup $IntV \subseteq X$ od X, postoji otvoreni skup $U \subseteq X$ takav da je $\{x\} \subseteq U \subseteq IntV \subseteq V$ i $IndFrU \leq n - 1$. Po pretpostavci indukcije, vrijedi $indFrU \leq IndFrU \leq n - 1$. Odavde slijedi da je $indX \leq n = IndX$. ■
Prvo pokazujemo da se mala i velika induktivna dimenzija podudaraju u klasi separabilnih metrizabilnih prostora.

Teorem 4.2 *Neka je X separabilan metrizabilan prostor. Tada je $indX = IndX$.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je $IndX \leq indX$ jer obratna nejednakost vrijedi općenito u normalim prostorima.
Ako je $indX = \infty$, onda, očito, vrijedi $IndX \leq indX$, pa pretpostavimo da je $indX \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$. U ovom slučaju dokaz provodimo indukcijom po $n = indX \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$.
Za $indX = -1$ je $X = \emptyset$, pa je $IndX = -1 \leq indX$.
Pretpostavimo da, za svaki separabilni metrizabilan prostor Y male induktivne dimenzije $indY$ strogo manje od n, vrijedi $IndY \leq indY$ i neka je $indX = n$. Dokažimo da je $IndX \leq n$.
Neka je $A, B \subseteq X$ proizvoljan par disjunktnih zatvorenih podskupova od X. Po Prvom teoremu separacije, postoji separator L skupova A i B u X takav da je $indL \leq n-1$. Po pretpostavci indukcije, vrijedi $IndL \leq indL \leq n-1$. Iz Teorema 2.6 slijedi $IndX \leq n = indX$.
Dakle, $IndX \leq indX$. ■

4.2 Teorem kompaktifikacije

Teorem kompaktifikacije kaže da se svaki separabilan metrizabilan prostor X može smjestiti u kompaktni metrizabilan prostor manje ili jednake dimenzije pokrivanja.

Definirajmo najprije pojam kompaktifikacije:

Definicija 4.3 *Kompaktifikacija topološkog prostora X je par (Y, c) koji se sastoji od topološkog prostora Y i preslikavanja $c : X \to Y$ tako da vrijedi:*

(K1) Preslikavanje $c : X \to c(X)$ je homeomrfizam (to jest $c : X \to Y$ je ulaganje).

(K2) Skup $c(X)$ je gust na Y.

(K3) Topološki prostor Y je kompaktan.

U dokazu Teorema kompaktifikacije, proizvoljnu metriku d koja metrizira toplogiju na X, mijenjamo pogodno odabranom topološki ekvivalentnom potpuno omeđenom metrikom $\tilde{d}$ i onda promatramo upotpunjenje $(\tilde{X}, \tilde{\tilde{d}})$ prostora $(X, \tilde{d})$.

Prisjetimo se:

Definicija 4.4 *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Kažemo da je f ulaganje (ili smještenje) prostora X u prostor Y, ako je $f : X \to f(X)$ homeomorfizam prostora X na potprostor f(X) prostora Y.*

Definicija 4.5 *Neka su d i d' metrike na skupu X. Kažemo da su d i d' topološki ekvivalentne metrike ako su identitete $1_{dd'} = idX : (X, d) \to (X, d')$ i $1_{d'd} = idX : (X, d') \to (X, d)$ neprekidna preslikavanja.*

Vrijedi:

Teorem 4.6 *Neka su d i d' metrike na skupu X. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) d i d' su topološki ekvivalentne metrike.

(ii) Identiteta $1_{dd'} = idX : (X, d) \to (X, d')$ je homeomorfizam.

(iii) Metričke topologije na X inducirane metrikama d i d' se podudaraju, tj. $T_d = T_{d'}$.

Definicija 4.7 *Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq X$. Kažemo da je A potpuno omeđen podskup od X, ako, za svaki $\epsilon > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ i podskupovi $X_1, X_2, \ldots, X_n \subseteq X$ tako da je $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ i $diam X_i < \epsilon$, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$, ili ekvivalentno, za svaki $\epsilon > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ i točke $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ takve da je $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$.*
Za metrički prostor (X, d) kažemo da je potpuno omeđen (ili da je d potpuno omeđena metrika na X), ako je skup X potpuno omeđen.

Očito vrijedi:

Propozicija 4.8 *Metrički prostor X je potpuno omeđen, ako za svaki $\epsilon > 0$, postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od X takav da je $mesh\mathcal{U} < \epsilon$.*

Definicija 4.9 *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je potpun (ili da je d potpuna metrika na X), ako svaki Cauchyjev niz (x_n) u X konvergira prema nekoj točki $x_0 \in X$.*

Definicija 4.10 *Neka su (X, d), (Y, d') metrički prostori i $f : X \to Y$ preslikavanje. Kažemo da je f izometrija ako vrijedi $d'(f(x), f(x')) = d(x, x')$, za svaki $x, x' \in X$.*

Definicija 4.11 *Neka je (X, d) metrički prostor. Upotpunjenjem prostora (X, d) nazivamo par koji se sastoji od metričkog prostora $(\tilde{X}, \tilde{d})$ i preslikavanja $i : X \to \tilde{X}$ tako da vrijedi:*

(C1) Preslikavanje $i : X \to \tilde{X}$ je izometrija.

(C2) Skup $i(X)$ je gust na $\tilde{X}$.

(C3) Metrički prostor $(\tilde{X}, \tilde{d})$ je potpun.

Vrijedi:

Napomena 4.12 *Za svaki metrički prostor (X, d), postoji upotpunjenje $((\tilde{X}, \tilde{d}), i)$. Nadalje, ako je $f : X \to I = [0, 1]$ uniformno neprekidna funkcija, tj. ako vrijedi*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in X)\ d(x, x') < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon,$$

onda postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje $\tilde{f} : \tilde{X} \to I$ takvo da je $\tilde{f} \circ i = f$.

Neka je (X, d) potpuno omeđen metrički prostor i $((\tilde{X}, \tilde{d}), i)$ upotpunjenje od (X, d). Tada je $(\tilde{X}, \tilde{d})$ također potpuno omeđen prostor. Naime, ako je $A \subseteq Y$ potpuno omeđen podskup metričkog prostora Y, onda je i ClA potpuno omeđen skup u Y. Nadalje, izometrija čuva potpunu omeđenost, pa je $(i(X), \tilde{d})$ potpuno omeđen. Dakle, $(Cl(i(X)), \tilde{d}) = (\tilde{X}, \tilde{d})$ je potpuno omeđen.

U euklidskom prostoru potpuna omeđenost i omeđenost su ekvivalentni pojmovi, odnosno vrijedi:

Teorem 4.13 *Podskup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ je potpuno omeđen ako i samo ako je omeđen.*

U dokazu Teorema kompaktifikacije koristit ćemo sljedeću lemu:

Lema 4.14 *Neka je* (X,d) *potpuno omeđen metrički prostor i* $f_1,\ldots,f_k : X \to I$, $k \in \mathbb{N}$, *neprekidna preslikavanja iz prostora* X *u jedinični segment* $I=[0,1]$. *Tada, za svaki pozitivan broj* $\epsilon > 0$, *postoji konačan otvoren pokrivač* $\mathcal{U} = (U_j, j \in \{1,\ldots,n\})$ *od* X *takav da je*

$$mesh\mathcal{U} < \epsilon \ i \ |f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon$$

, $(\forall i \in \{1,\ldots,k\})(\forall x,y \in U_j)(\forall j \in \{1,\ldots,n\})$.

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan i neka je $\mathcal{V} = (V_i, i \in \{1,\ldots,k_1\}$ konačan otvoren pokrivač prostora X takav da je $mesh\mathcal{V} < \epsilon$ i $\mathcal{W} = (W_i, i \in \{1,\ldots,k_2\})$ konačan otvoren pokrivač jediničnog segmenta I takav da je $mesh\mathcal{W} < \epsilon$.
Stavimo,

$$\mathcal{U} := \mathcal{V} \wedge f_1^{-1}(\mathcal{W}) \wedge \cdots \wedge f_k^{-1}(\mathcal{W}).$$

Kako je svaki član $V_i \cap f_1^{-1}(W_{j_1}) \cap \ldots f_k^{-1}(W_{j_k})$ pokrivača $\mathcal{U}$ podskup odgovarajućeg člana V_i pokrivača $\mathcal{V}$, to je $diam(V_i \cap f_1^{-1}(W_{j_1}) \cap \ldots f_k^{-1}(W_{j_k})) \leq diamV_i < \epsilon$, pa iz konačnosti od $\mathcal{U}$ slijedi $mesh\mathcal{U} < \epsilon$. Iz neprekidnosti preslikavanja $f_1,\ldots,f_k$, te otvorenosti pokrivača $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ slijedi da je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač prostora X.

Dokažimo još da za svaki izbor $l \in \{1,\ldots,k\}, i \in \{1,\ldots,k_1\}, j_1,\ldots,j_k \in \{1,\ldots,k_2\}$ i za svaki $x,y \in V_i \cap f_1^{-1}(W_{j_1}) \cap \ldots f_k^{-1}(W_{j_k})$, vrijedi $|f_l(x) - f_l(y)| < \epsilon$. Odaberimo $l \in \{1,\ldots,k\}, i \in \{1,\ldots,k_1\}, j_1,\ldots,j_k \in \{1,\ldots,k_2\}$ i $x,y \in V_i \cap f_1^{-1}(W_{j_1}) \cap \ldots f_k^{-1}(W_{j_k})$. Budući da je $x,y \in V_i \cap f_1^{-1}(W_{j_1}) \cap \ldots f_k^{-1}(W_{j_k}) \subseteq f_l^{-1}(W_{j_l})$, slijedi $f_l(x), f_l(y) \in W_{j_l}$. Kako je $diamW_{j_l} < \epsilon$ u prostoru I, to je $|f_l(x) - f_l(y)| < diamW_{j_l} < \epsilon$. Time je lema u potpunosti dokazana. ■

Prisjetimo se, Hilbertova kocka, u oznaci I^ω, je topološki produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}} I_n$, gdje je $I_n = I = [0,1]$ potprostor euklidskog prostora $\mathbb{R}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Svaki separabilan metrizabilan prostor može se smjestiti u Hilbertovu kocku I^ω. Štoviše vrijedi:

Teorem 4.15 *Neka je X topološki prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) X je 2-prebrojiv i regularan.

(ii) X je homeomorfan potprostoru Hilbertove kocke I^ω.

(iii) X je metrizabilan i separabilan.

Nadalje, ako je topološki prostor X homeomorfan potpuno omeđenom metričkom prostoru (Y, d), onda postoji potpuno omeđena metrika koja metrizira toplogiju na X.

Kako je Hilberova kocka I^ω kompaktan prostor, to postoji potpuna i potpuno omeđena metrika d koja metrizira topologiju na I^ω. Tada je, za svaki potprostor $A \subseteq I^\omega$, prostor (A, d) također potpuno omeđen. Dakle, i za svaki topološki prostor X homeomorfan potprostoru Hilbertove kocke vrijedi da postoji potpuno omeđena metrika koja metrizira topologiju na X. Posebno, za svaki separabilan metrizabilan prostor X postoji potpuno omeđena metrika koja metrizira toplogiju na X.

Teorem 4.16 (Teorem kompaktifikacije) *Neka je X separabilan metrizabilan prostor. Tada postoji kompaktifikacija $(\tilde{X}, i)$ od X takva da je $dim\tilde{X} \leq dimX$.*

Dokaz. Neka je d potpuno omeđena metrika koja metrizira topologiju na X. Za svaki $m \in \mathbb{N}$, ćemo rekurzivno definirati konačne otvorene pokrivače $\mathcal{U}_m = (U_{m,k}, k \in \{1, \ldots, k_m\})$ prostora X takve da vrijedi:

(i) $ord\mathcal{U}_m \leq dimX$;

(ii) $mesh\mathcal{U}_m \leq \frac{1}{2^m}$;

(iii) Za svaki $0 < i < m$ i $k \leq k_i$, je $|f_{i,k}(x) - f_{i,k}(y)| \leq \frac{1}{2^m}$, kad god x, y pripadaju istom članu pokrivača $\mathcal{U}_m$, gdje su $f_{i,k} : X \to I$ definirane s:

$$f_{i,k}(x) = \frac{d(x, X \setminus U_{i,k})}{\sum\limits_{j=1}^{k_i} d(x, X \setminus U_{i,j})}\text{ , za svaki } x \in X.$$

Kako je X potpuno omeđen, to postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od X takav da je $mesh\mathcal{U} < \frac{1}{2}$. Ako je $dimX = \infty$, onda je $ord\mathcal{U} \leq dimX$. Ako je $dimX < \infty$ onda, po definiciji dimenzije pokrivanja, $\mathcal{U}$ ima konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{U}'$ reda manjeg ili jednakog $dimX$. Kako je $mesh\mathcal{U}' \leq mesh\mathcal{U}$, to, i u jednom i drugom slučaju, postoji konačan otvoren pokrivač, nazovimo ga $\mathcal{U}_1 = (U_{1,k}, k \in \{1, \ldots, k_1\})$, prostora X, takav da je $ord\mathcal{U}_1 \leq dimX$ i $mesh\mathcal{U}_1 \leq \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$.

Pretpostavimo da smo definirali konačne otvorene pokrivače $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_{m-1}, m > 1$ i pripadna preslikavanja $f_{i,k}$, za svaki $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ i $k \in \{1, \ldots, k_i\}$, tako da vrijedi $(i), (ii)$ i (iii).
Primjetimo da su preslikavanja $f_{i,k}$ dobro definirana, za svaki $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ i svaki $k \in \{1, \ldots, k_i\}$. Naime, kada bi za $x \in X$ proizvoljan vrijedilo $\sum\limits_{j=1}^{k_i} d(x, X \setminus U_{i,j}) = 0$, onda bi slijedilo

$$x \in Cl(X \setminus U_{i,j}) = X \setminus U_{i,j}$$

, za svaki $j \in \{1, \ldots, k_i\}$. Odavde bi slijedilo

$$x \in \bigcap_{j=1}^{k_i} (X \setminus U_{i,j}) = X \setminus (\bigcup_{j=1}^{k_i} U_{i,j}) = X \setminus X = \emptyset.$$

Nadalje, preslikavanja $f_{i,k}$ su neprekidna, za svaki $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ i svaki $k \in \{1, \ldots, k_i\}$. To slijedi iz činjenice da je preslikavanje $x \mapsto d(x, A)$ neprekidno, za svaki podskup $A \subseteq X$, i neprekidnosti zbrajanja i dijeljenja realnih brojeva. Uočimo da je $f_{i,k}(x) \in I$, jer je $0 \leq d(x, X \setminus U_{i,k}) \leq \sum\limits_{j=1}^{k_i} d(x, X \setminus U_{i,j})$, za svaki $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ i svaki $k \in \{1, \ldots, k_i\}$. Po prethodnoj lemi, za $\epsilon = \frac{1}{2^m} > 0$ i konačan niz neprekidnih preslikavanja $(f_{i,k} : X \to I,\, i \in \{1, \ldots, m-1\}\,,\, k \in \{1, \ldots, k_i\})$, postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X takav da je $mesh\mathcal{U} < \frac{1}{2^m}$ i $|f_{i,k}(x) - f_{i,k}(y)| < \frac{1}{2^m}$, kad god x i y pripadaju istom članu pokrivača $\mathcal{U}$. Ako je $dimX = \infty$, onda je $ord\mathcal{U} \leq dimX$. Ako je $dimX < \infty$, onda, po definiciji dimenzije pokrivanja, $\mathcal{U}$ ima konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{U}'$ reda manjeg ili jednakog $dimX$. Kako je $mesh\mathcal{U}' \leq mesh\mathcal{U}$, to, i u jednom i drugom slučaju, postoji konačan otvoren pokrivač, nazovimo ga $\mathcal{U}_m = (U_{m,k}, k \in \{1, \ldots, k_m\})$, prostora X takav da je $ord\mathcal{U}_m \leq dimX$ i $meshU_m \leq \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2^m}$. Poredajmo elemente skupa $\{(m,k) : m \in \mathbb{N}, k \in \{1, \ldots, k_m\}\}$ u niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tako da je $x_1 = (1,1), \ldots, x_{k_1} = (1, k_1), x_{k_1+1} = (2,1), \ldots, x_{k_1+k_2} = (2, k_2), \ldots, x_{(\sum_{i=1}^{m-1} k_i)+1} = (m, 1), \ldots, x_{\sum_{i=1}^{m} k_i} = (m, k_m), \ldots$ i neka je $n(m_0, k_0) := x^{-1}(m_0, k_0)$, za svaki $(m_0, k_0) \in \{(m,k) : m \in \mathbb{N}, k \in \{1, \ldots, k_m\}\}$. Definirajmo $\tilde{d} : X \times X \to \mathbb{R}$

$$\tilde{d}(x,y) = d(x,y) + \sum_{n(i,k)=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,k)}} |f_{i,k}(x) - f_{i,k}(y)|, \text{ za } x, y \in X.$$

Dokažimo da je $\tilde{d}$ metrika na X.

(M1) Očito je $\tilde{d}(x,y) \geq 0$ za svaki $x, y \in X$.

(M2) Pretpostavimo da je $\tilde{d}(x,y) = 0$. Onda je $d(x,y) = 0$, pa je $x = y$. Obratno, $\tilde{d}(x,x) = d(x,x) + \sum\limits_{n(i,k)=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,k)}} |f_{i,k}(x) - f_{i,k}(x)| = 0$.

(M3) $\tilde{d}(x,y) = d(x,y) + \sum\limits_{n(i,k)=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,k)}} |f_{i,k}(x) - f_{i,k}(y)| = d(y,x) + \sum\limits_{n(i,k)=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,k)}} |f_{i,k}(y) - f_{i,k}(x)| = \tilde{d}(y,x)$, za svaki $x, y \in X$.

(M4) $\tilde{d}(x,z) = d(x,z) + \sum\limits_{n(i,k)=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,k)}} |f_{i,k}(x) - f_{i,k}(z)| \leq$
$\leq d(x,y) + d(y,z) + \sum\limits_{n(i,k)=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,k)}} (|f_{i,k}(x) - f_{i,k}(y)| + |f_{i,k}(y) - f_{i,k}(z)|) =$
$= d(x,y) + \sum\limits_{n(i,k)=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,k)}} |f_{i,k}(x) - f_{i,k}(y)| +$
$+ d(y,z) + \sum\limits_{n(i,k)=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,k)}} |f_{i,k}(y) - f_{i,k}(z)| =$
$= \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z)$, za svaki $x, y, z \in X$.

Dokažimo da su d i $\tilde{d}$ topološki ekvivaletne metrike. Kako je $d(x,y) \leq \tilde{d}(x,y)$ za svaki $x, y \in X$, to je identiteta $1_{\tilde{d}d} = id : (X, \tilde{d}) \to (X, d)$ (uniformno) neprekidno preslikavanje.

Dokažimo da je identiteta $1_{d\tilde{d}} = id : (X, d) \to (X, \tilde{d})$ neprekidno preslikavanje. Neka je $x \in X$ po volji odabran i $\epsilon > 0$ proizvoljan. Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum\limits_{j=m}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\epsilon}{6}$. Takav m sigurno postoji jer geometrijski red $\sum \frac{1}{2^j}$ konvergira. Kako je $\mathcal{U}_m$ pokrivač prostora X, to postoji član U pokrivača $\mathcal{U}_m$ takav da je $x \in U$. Kako je $U \subseteq X$ otvoren, to postoji $\delta' > 0$ takav da je $B_d(x, \delta') \subseteq U$.

Neka je $y \in X$ takav da je $d(x,y) < \delta := min\{\delta', \frac{\epsilon}{2}\}$. Tada je $y \in B_d(x, \delta) \subseteq U$, pa je $|f_{i,k}(x) - f_{i,k}(y)| \leq \frac{1}{2^m}$, za svaki $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ i svaki $k \in \{1, \ldots, k_m\}$. Sada je:
$\tilde{d}(x,y) = d(x,y) + \sum\limits_{n(i,k)=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,k)}} |f_{i,k}(x) - f_{i,k}(y)| =$
$= d(x,y) + \sum\limits_{n(i,k)=1}^{m-1} \frac{1}{2^{n(i,k)}} |f_{i,k}(x) - f_{i,k}(y)| + \sum\limits_{n(i,k)=m}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,k)}} |f_{i,k}(x) - f_{i,k}(y)| \leq$
$\leq d(x,y) + \sum\limits_{n(i,k)=1}^{m-1} \frac{1}{2^{n(i,k)}} \frac{1}{2^m} + 2 \sum\limits_{n(i,k)=m}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,k)}} \leq$
$\leq d(x,y) + \sum\limits_{n(i,k)=m}^{2m-1} \frac{1}{2^{n(i,k)}} + 2 \sum\limits_{n(i,k)=m}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,k)}} \leq$
$\leq d(x,y) + 3 \sum\limits_{n(i,k)=m}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,k)}} < \frac{\epsilon}{2} + 3\frac{\epsilon}{6} = \epsilon$
Dakle i identiteta $1_{d\tilde{d}} = id : (X, d) \to (X, \tilde{d})$ je neprekidno preslikavanje, pa

su d i $\tilde{d}$ topološki ekvivalentne metrike.

Pokažimo sada da niz $(mesh_{\tilde{d}}\mathcal{U}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergira prema 0. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan i $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum\limits_{j=m_0}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\epsilon}{4}$. Za svaki $m \geq m_0$, svaki član U pokrivača $\mathcal{U}_m$ prostora X i $x, y \in U$ proizvoljne vrijedi:

$$\tilde{d}(x,y) = d(x,y) + \sum_{n(i,k)=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^{n(i,k)}}|f_{i,k}(x) - f_{i,k}(y)| =$$
$$= d(x,y) + \sum_{n(i,k)=1}^{m-1} \tfrac{1}{2^{n(i,k)}}|f_{i,k}(x) - f_{i,k}(y)| + \sum_{n(i,k)=m}^{\infty} \tfrac{1}{2^{n(i,k)}}|f_{i,k}(x) - f_{i,k}(y)| \leq$$
$$\leq \tfrac{1}{2^m} + \sum_{n(i,k)=1}^{m-1} \tfrac{1}{2^{n(i,k)}}\tfrac{1}{2^m} + 2\sum_{n(i,k)=m}^{\infty} \tfrac{1}{2^{n(i,k)}} \leq$$
$$\leq \tfrac{1}{2^{m_0}} + \sum_{n(i,k)=m}^{2m-1} \tfrac{1}{2^{n(i,k)}} + 2\sum_{n(i,k)=m}^{\infty} \tfrac{1}{2^{n(i,k)}} \leq$$
$$\leq \sum_{n(i,k)=m_0}^{\infty} \tfrac{1}{2^{n(i,k)}} + 3\sum_{n(i,k)=m}^{\infty} \tfrac{1}{2^{n(i,k)}} \leq$$
$$\leq 4\sum_{n(i,k)=m_0}^{\infty} \tfrac{1}{2^{n(i,k)}} < 4\tfrac{\epsilon}{4} = \epsilon$$

Dakle, $mesh_{\tilde{d}}\mathcal{U}_m \leq \epsilon$, za svaki $m \geq m_0$. Odavde odmah slijedi da je metrički prostor $(X, \tilde{d})$ potpuno omeđen.

Dokažimo sada da su preslikavanja $f_{m,k} : (X, \tilde{d}) \to I$ uniformno neprekidna preslikavanja, za svaki $m \in \mathbb{N}$ i svaki $k \in \{1, \ldots, k_m\}$.

Neka su $m_0 \in \mathbb{N}$ i $k_0 \in \{1, \ldots, k_m\}$ proizvoljni i $\epsilon > 0$ po volji odabran. Za $\delta := \frac{\epsilon}{2^{n(m_0,k_0)}}$ vrijedi:

$$(\forall x, y \in X)\ \tilde{d}(x,y) < \delta \Rightarrow |f_{m_0,k_0}(x) - f_{m_0,k_0}(y)| =$$
$$= 2^{n(m_0,k_0)}\tfrac{1}{2^{n(m_0,k_0)}}|f_{m_0,k_0}(x) - f_{m_0,k_0}(y)| \leq$$
$$\leq 2^{n(m_0,k_0)}(d(x,y) + \sum_{n(i,k)=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^{n(i,k)}}|f_{i,k}(x) - f_{i,k}(y)|) =$$
$$= 2^{n(m_0,k_0)}\tilde{d}(x,y) < 2^{n(m_0,k_0)}\delta = 2^{n(m_0,k_0)}\tfrac{\epsilon}{2^{n(m_0,k_0)}} = \epsilon.$$

Dakle, $f_{m,k} : (X, \tilde{d}) \to I$ je uniformno neprekidno preslikavanje, za svaki $m \in \mathbb{N}$ i svaki $k \in \{1, \ldots, k_m\}$.

Neka je $((\tilde{X}, \tilde{\tilde{d}}), i)$ upotpunjenje metričkog prostora $(X, \tilde{d})$. Po prethodnim napomenama, $(\tilde{X}, \tilde{\tilde{d}})$ je potpuno omeđen prostor i, za svaki $m \in \mathbb{N}$ i

$k \in \{1, \ldots, k_m\}$, postoje jedinstvena neprekidna preslikavanja $\tilde{f}_{m,k}; \tilde{X} \to I$ takva da je $\tilde{f}_{m,k} \circ i = f_{m,k}$.

Kako je $\tilde{X}$ potpun i potpuno omeđen to je, po karakterizaciji kompaktnosti u klasi metričkih prostora, X kompaktan. Dakle $(\tilde{X}, i)$ je kompaktifikacija od X. Dokažimo još da je $dim\tilde{X} \leq dimX$.

Vrijedi $\sum\limits_{k=1}^{k_m} f_{m,k}(x) = \sum\limits_{k=1}^{k_m} \frac{d(x, X \setminus U_{m,k})}{\sum\limits_{j=1}^{k_m} d(x, X \setminus U_{m,j})} = 1$, za svaki $x \in X$. Dokažimo da je i $\sum\limits_{k=1}^{k_m} \tilde{f}_{m,k}(x) = 1$.

Neka je $x \in \tilde{X}$ proizvoljan. Kako je $i(X)$ gust u $\tilde{X}$, to postoji niz $(i(x_n))$ u $i(X)$ takav da je $\lim(i(x_n)) = x$. Iz neprekidnosti $\tilde{f}_{m,k}$ slijedi:

$\sum\limits_{k=1}^{k_m} \tilde{f}_{m,k}(x) = \sum\limits_{k=1}^{k_m} \tilde{f}_{m,k}(lim(i(x_n))) = lim(\sum\limits_{k=1}^{k_m} \tilde{f}_{m,k}(i(x_n))) = lim(\sum\limits_{k=1}^{k_m} f_{m,k}(x_n)) = lim(1) = 1$

Za svaki $m \in \mathbb{N}$, definirajmo familiju podskupova $\tilde{\mathcal{U}}_m = (\tilde{U}_{m,k}, k \in \{1, \ldots, k_m\})$ od $\tilde{X}$ gdje je $\tilde{U}_{m,k} = \tilde{f}_{m,k}^{-1}(\langle 0, 1])$. Svaki $\tilde{U}_{m,k} \subseteq \tilde{X}$ je otvoren u $\tilde{X}$ jer su $\tilde{f}_{m,k}$ neprekidna preslikavanja i $\langle 0, 1] \subseteq I$ otvoren u I.

Nadalje, $\tilde{\mathcal{U}}_m$ je pokrivač od $\tilde{X}$ jer, za svaki $x \in \tilde{X}$, je $\sum\limits_{k=1}^{k_m} \tilde{f}_{m,k}(x) = 1$, pa postoji $j \in \{1, \ldots, k_m\}$ takav da je $\tilde{f}_{m,j}(x) > 0$. Sada je $x \in \tilde{U}_{m,j} = \tilde{f}_{m,j}^{-1}(\langle 0, 1])$.

Pokažimo sada da vrijedi $i(X) \cap \tilde{U}_{m,k} = i(U_{m,k})$.

Neka je $i(x) \in i(X) \cap \tilde{U}_{m,k}$ proizvoljan. Tada je

$$0 < \tilde{f}_{m,k}(i(x)) = f_{m,k}(x) = \frac{d(x, X \setminus U_{m,k})}{\sum\limits_{j=1}^{k_m} d(x, X \setminus U_{m,j})}$$

, pa je $d(x, X \setminus U_{m,k}) > 0$. Dakle, $x \notin Cl(X \setminus U_{m,k}) = X \setminus U_{m,k}$ iz čega slijedi $x \in U_{m,k}$. Dakle, $i(x) \in i(U_{m,k})$, pa vrijedi $i(X) \cap \tilde{U}_{m,k} \subseteq i(U_{m,k})$.

Obratno, pretpostavimo da je $i(x) \in i(U_{m,k})$. Tada je $d(x, X \setminus U_{m,k}) > 0$, pa je

$$0 < \frac{d(x, X \setminus U_{m,k})}{\sum\limits_{j=1}^{k_m} d(x, X \setminus U_{m,j})} = f_{m,k}(x) = \tilde{f}_{m,k}(i(x)).$$

Odavde slijedi $i(x) \in \tilde{f}_{m,k}^{-1}(\langle 0,1]) = \tilde{U}_{m,k}$. Očito je $i(x) \in i(X)$, pa je $i(x) \in i(X) \cap \tilde{U}_{m,k}$. Time je dokazano $i(X) \cap \tilde{U}_{m,k} \supseteq i(U_{m,k})$, odnosno $i(X) \cap \tilde{U}_{m,k} = i(U_{m,k})$.

Dokažimo sada da je $\lim(mesh_{\tilde{\tilde{d}}}\tilde{\mathcal{U}}_m) = 0$. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Kako je $\lim(mesh_{\tilde{d}}\mathcal{U}_m) = 0$, to postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da, za svaki $m \geq m_0$, vrijedi $mesh_{\tilde{d}}\mathcal{U}_m < \epsilon$. Neka je sad $m \geq m_0$ proizvoljan i $k \in \{1, \ldots, k_m\}$ po volji odabran. Dokažimo da je $diam_{\tilde{\tilde{d}}}\tilde{U}_{m,k} \leq \epsilon$. Neka su $x, y \in \tilde{U}_{m,k}$ proizvoljni. Tada postoje nizovi $(i(x_n)), (i(y_n))$ u $i(X)$ takvi da $\lim(i(x_n)) = x, \lim(i(y_n)) = y$. Kako je $\tilde{U}_{m,k} \subseteq \tilde{X}$ otvoren u $\tilde{X}$, to postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da, za svaki $n \geq n_0$, vrijedi $i(x_n), i(y_n) \in \tilde{U}_{m,k}$. Dakle, za svaki $n \geq n_0$ $i(x_n), i(y_n) \in \tilde{U}_{m,k} \cap i(X) = i(U_{m,k})$, odnosno $x_n, y_n \in U_{m,k}$. Sada je:

$$\tilde{\tilde{d}}(x,y) = \tilde{\tilde{d}}(\lim(i(x_n)), \lim(i(y_n))) = \lim(\tilde{\tilde{d}}(i(x_n), i(y_n))) = \lim(\tilde{d}(x_n, y_n)).$$

Kako je $diam_{\tilde{d}}U_{m,k} < \epsilon$ i kako su $x_n, y_n \in U_{m,k}$, za svaki $n \geq n_0$, to je $\lim(\tilde{d}(x_n, y_n)) \leq \epsilon$. Odavde slijedi $diam_{\tilde{\tilde{d}}}\tilde{U}_{m,k} \leq \epsilon$, pa je $mesh_{\tilde{\tilde{d}}}\tilde{\mathcal{U}}_m \leq \epsilon$, za svaki $m \geq m_0$ iz čega slijedi $\lim(mesh_{\tilde{\tilde{d}}}\tilde{\mathcal{U}}_m) = 0$.

Dokažimo sada da je $ord\tilde{\mathcal{U}}_m \leq dimX$, za svaki $m \in \mathbb{N}$.
Ako je $dimX = \infty$ tvrdnja očito vrijedi, pa pretpostavimo da je $dimX < \infty$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $ord\tilde{\mathcal{U}}_m > dimX$. Tada postoje međusobono različiti članovi $\tilde{U}_{m,1}, \ldots, \tilde{U}_{m,dimX+2}$ pokrivača $\tilde{\mathcal{U}}_m$ takvi da je

$$\tilde{U}_{m,1} \cap \cdots \cap \tilde{U}_{m,dimX+2} \neq \emptyset.$$

Kako je $\tilde{U}_{m,1} \cap \cdots \cap \tilde{U}_{m,dimX+2} \subseteq \tilde{X}$ neprazan i otvoren, te $i(X)$ gust na $\tilde{X}$, to je

$$\tilde{U}_{m,1} \cap \cdots \cap \tilde{U}_{m,dimX+2} \cap i(X) \neq \emptyset.$$

Odnosno,

$$i(U_{m,1}) \cap \cdots \cap i(U_{m,dimX+2}) \neq \emptyset,$$

pa je

$$U_{m,1} \cap \cdots \cap U_{m,dimX+2} \neq \emptyset,$$

a to je u kontradikciji s činjenicom da je $ord\mathcal{U}_m \leq dimX$. Time smo dokazali $ord\tilde{\mathcal{U}}_m \leq dimX$, za svaki $m \in \mathbb{N}$.

Dakle, u prostoru $(\tilde{X}, \tilde{\tilde{d}})$, za svaki $\epsilon > 0$ postoji dovoljno velik $m \in \mathbb{N}$ takav da, za konačan otvoren pokrivač $\tilde{\mathcal{U}}_m$, vrijedi $mesh_{\tilde{\tilde{d}}}\tilde{\mathcal{U}}_m < \epsilon$ i pri tom je $ord\tilde{\mathcal{U}}_m \leq dimX$. Iz Teorema 3.27 slijedi $dim\tilde{X} \leq dimX$. Time je teorem u potpunosti dokazan. ■

4.3 Teorem o jednakosti dimenzija

U ovom poglavlju ćemo dokazati da, za svaki separabilni metrizabilan prostor X, vrijedi $indX = IndX = dimX$.

Lema 4.17 *Neka je X metrizabilan prostor i $M \subseteq X$ potprostor od X. Za svaku familiju $(G_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ u parovima disjunktnih otvorenih podskupova u prostoru M, postoji familija $(H_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ u parovima disjunktnih otvorenih podskupova u prostoru X tako da vrijedi $G_i \subseteq H_i$, za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$.*

Dokaz. Neka je d metrika koja metrizira toplogiju na X. Za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$, neka je

$$H_i := \{x \in X : d(x, G_i) < d(x, M \setminus G_i)\}.$$

Preslikavanja $x \mapsto d(x, G_i)$ i $x \mapsto d(x, M \setminus G_i)$ su neprekidna, pa je $H_i \subseteq X$ otvoren za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$.
Nadalje, za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$ i proizvoljan $x \in G_i \subseteq M$, je $x \notin M \setminus G_i = Cl_M M \setminus G_i$, pa je $d(x, M \setminus G_i) > 0$, odnosno $0 = d(x, G_i) < d(x, X \setminus G_i)$.

Dakle, $x \in H_i$.

Ako je $x \in H_i \cap H_j$, onda je $0 \leq d(x, G_i) < d(x, M \setminus G_i)$ i $0 \leq d(x, G_j) < d(x, M \setminus G_j)$, pa je $x \notin Cl(M \setminus G_i) \supseteq M \setminus G_i, x \notin Cl(M \setminus G_j) \supseteq M \setminus G_j$. Time je pokazano da je $x \in G_i \cap G_j$, a iz toga slijedi $i = j$. Odnosno, skupovi $H_i, i \in \{1, \ldots, k\}$ su u parovima disjunktni. ■

Lema 4.18 *Za svaki separabilan metrizabilan prostor X vrijedi $dimX \leq indX$.*

Dokaz. Neka je X seprarabilan metrizabilan prostor. Ako je $indX = \infty$ tvrdnja očito vrijedi. Ako je $indX = -1$, onda je $X = \emptyset$, pa je $dimX = -1 = indX$. Pretpostavimo da je $indX = 0$. Neka je $\mathcal{U} = (U_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ konačan otvoren pokrivač prostora X. Po Teoremu 1.15, X ima prebrojivu bazu $\mathcal{B}$ takvu da je $indFrV \leq -1$, odnosno $FrV = \emptyset$, za svaki $V \in \mathcal{B}$. Kako je

$$\emptyset = FrV = ClV \setminus IntV \Rightarrow ClV = IntV = V,$$

to su svi elementi baze $\mathcal{B}$ otvoreno-zatvoreni u X.

Neka je $(V_i, i \in \mathbb{N})$ otvoreno profinjenje od $\mathcal{U}$ koje se sastoji od elemenata baze $\mathcal{B}$. Takvo uvijek postoji jer, po karakterizaciji baze topološkog prostora, za svaki $x \in X$ i svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$ takav da je $x \in U_i$, postoji $V \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in V \subseteq U_i$.

Neka je $W_1 := V_1$ i, za svaki $i \in \mathbb{N}, i \geq 2$, definirajmo

$$W_i := V_i \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} W_j).$$

Skupovi $W_i, i \in \mathbb{N}$ su u parovima disjunktni, otvoreno-zatvoreni i $(W_i, i \in \mathbb{N})$ je profinjenje od $\mathcal{U}$. Naime, za svaki $x \in X$, neka je $n(x) = \min\{i \in \mathbb{N} : x \in V_i\}$. Kako je $(V_i, i \in \mathbb{N})$ pokrivač prostora X, to je skup $\{i \in \mathbb{N} : x \in V_i\}$ neprazan podskup skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, pa $n(x)$ sigurno postoji. Očito je $x \in W_{n(x)} = V_{n(x)} \backslash (\bigcup_{j=1}^{n(x)-1} W_j)$, pa je $(W_i, i \in \mathbb{N})$ pokrivač prostora X. Kako je $W_i \subseteq V_i$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, i $(V_i, i \in \mathbb{N})$ profinjenje od $\mathcal{U}$, to je $(W_i, i \in \mathbb{N})$ profinjenje od $\mathcal{U}$.

Vrijedi $ord(W_i, i \in \mathbb{N}) \leq 0$ jer su skupovi $W_i, i \in \mathbb{N}$ u parovima disjunktni.
Iz Teorema 3.8 slijedi $dimX \leq 0 = indX$.

Sada pretpostavimo da je $indX = n > 0$ i neka je $\mathcal{U} = (U_i, i \in \{1, \dots, k\})$ konačan otvoren pokrivač prostora X. Po Drugom teoremu dekompozicije 1.34, postoje potprostori $Z_j \subseteq X$ od X, $j \in \{1, \dots, n+1\}$ takvi da je

$$indZ_j \leq 0 \text{ za svaki } j \in \{1, \dots, n+1\} \text{ i } X = \bigcup_{i=j}^{n+1} Z_j.$$

Iz prethodno dokazanog slijedi da je $dimZ_j \leq 0$, za svaki $j \in \{1, \dots, n+1\}$.
Iz Teorema 3.8 slijedi da, za svaki $j \in \{1, \dots, n+1\}$, otvoren pokrivač $\mathcal{U}|Z_j$ ima otvoreno (u Z_j) umanjenje $(G_{j,i}, i \in \{1, \dots, k\})$ reda $ord(G_{j,i}, i \in \{1, \dots, k\}) \leq 0$, tj. $G_{j,i}, i \in \{1, \dots, k\}$ su u parovima disjunktni otvoreni skupovi u Z_j. Iz prethodne leme slijedi da postoji familija $(H_{j,i}, i \in \{1, \dots, k\})$ u parovima disjunktnih otvorenih skupova u X tako da vrijedi $G_{j,i} \subseteq H_{j,i}$ za svaki $i \in \{1, \dots, k\}$.
Familija $(V_{j,i} = H_{j,i} \cap U_i, i \in \{1, \dots, k\} j \in \{1, \dots, n+1\})$ je otvoreno profinjenje pokrivača $\mathcal{U}$. Naime, za svaki $x \in X$, postoji $j \in \{1, \dots, n+1\}$ takav da je $x \in Z_j$. Kako je $(G_{j,i}, i \in \{1, \dots, k\})$ pokrivač od Z_j to postoji $i \in \{1, \dots, k\}$ takav da je $x \in G_{j,i} \subseteq H_{j,i} \cap (U_i \cap Z_j) \subseteq V_{j,i}$. Nadalje, $V_{i,j} \subseteq X$ su otvoreni u X, kao presjek otvorenih skupova, za svaki $i \in \{1, \dots, k\}$ i $j \in \{1, \dots, n+1\}$. Očito je $V_{j,i} \subseteq U_i$, za svaki $i \in \{1, \dots, k\}$ i $j \in \{1, \dots, n+1\}$, pa je $(V_{j,i}, i \in \{1, \dots, k\} j \in \{1, \dots, n+1\})$, uistinu, otvoreno profinjenje pokrivača $\mathcal{U}$.

Nadalje, vrijedi $ord(V_{j,i}, i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, n+1\}) \leq n$ jer, za proizvoljna $n+2$ različita člana $V_{j_1,i_1}, \dots, V_{j_{n+2},i_{n+2}}$ pokrivača $(V_{j,i}, i \in$

$\{1,\ldots,k\} j \in \{1,\ldots,n+1\})$, moraju postojati $l_1, l_2 \in \{1,\ldots,n+2\}$ takvi da je $j_{l_1} = j_{l_2}$, pa je
$V_{j_1,i_1} \cap \cdots \cap V_{j_{n+2},i_{n+2}} \subseteq V_{j_{l_1},i_{l_1}} \cap V_{j_{l_2},i_{l_2}} = (H_{j_{l_1},i_{l_1}} \cap U_{i_{l_1}}) \cap (H_{j_{l_2},i_{l_2}} \cap U_{i_{l_2}}) \subseteq$
$\subseteq H_{j_{l_1},i_{l_1}} \cap H_{j_{l_2},i_{l_2}} = H_{j_{l_1},i_{l_1}} \cap H_{j_{l_1},i_{l_2}} = \emptyset$. Odavde slijedi $dimX \leq n = indX$.
■

Lema 4.19 *Neka je (X,d) kompaktan metrički prostor i $A, B \subseteq X$ disjunktni zatvoreni podskupovi od X. Tada je $d(A,B) > 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $d(A,B) = \sup\{d(a,B) : a \in A\} = 0$. Po karakterizaciji supremuma, za svaki $n \in \mathbb{N}$, postoji $a_n \in A$ takav da je $d(a_n, B) < \frac{1}{n}$.
Za metričke prostore vrijedi nizovna karakterizacija kompaktnosti, tj. vrijedi da je metrički prostor Y kompaktan ako i samo ako svaki niz (y_n) u Y ima konvergentan podniz (y_{n_k}).
Dakle niz (a_n) ima konvergentan podniz (a_{n_k}) i neka je $a = \lim(a_{n_k})$. Kako je (a_{n_k}) niz u A i $A \subseteq X$ zatvoren, to je $a \in A$. Nadalje, $d(a,B) = d(\lim(a_{n_k}), B) = \lim(d(a_{n_k}, B)) \leq \lim(\frac{1}{n}) = 0$, odakle slijedi $a \in B$, što je kontradikcija s činjenicom da su A i B disjunktni. ■

Lema 4.20 *Za svaki kompaktni metrizabilan prostor X vrijedi $indX \leq dimX$.*

Dokaz. Neka je X kompaktan metrizabilan prostor i d metrika koja metrizira topologiju na X. Ako je $dimX = \infty$, onda tvrdnja očito vrijedi, pa pretpostavimo da je $dimX = n < \infty$. Dokaz provodimo indukcijom po $n = dimX \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$.
Pretpostavimo da je $dimX = -1$. Tada je $X = \emptyset$, pa je $indX = -1 = dimX$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki kompaktan metrizabilan prostor dimenzije pokrivanja strogo manje od n i neka je $dimX = n$.

Neka je $x \in X$ proizvoljna točka i $B \subseteq X$ po volji odbran zatvoren skup u X takav da $x \notin B$. Dokažimo da postoji separator L točke x i skupa B takav da je $dimL \leq n-1$, odnosno da postoje otvoreni skupovi $K, M \subseteq X$ u X takvi da je $L = X \setminus (K \cup M)$ i

$$x \in K,\ B \subseteq M,\ K \cap M = \emptyset \text{ i } dimL \leq n-1.$$

U tu svrhu ćemo rekurzivno, po $n \in \mathbb{N}$, definirati dva niza $(K_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$,$(M_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ zatvorenih podskupova od X tako da, za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$x \in K_{i-1} \subseteq IntK_i,\ B \subseteq M_{i-1} \subseteq IntM_i \text{ i } K_i \cap M_i = \emptyset, \tag{4.1}$$

i

$$\text{skup } L_i := X \setminus (K_i \cup M_i) \text{ ima konačan otvoren pokrivač } \mathcal{W}_i \text{ takav da je } mesh\mathcal{W}_i < \frac{1}{i} \text{ i } ord\mathcal{W}_i \leq n-1. \tag{4.2}$$

Neka je $K_0 := \{x\}$ i $M_0 = B$.

Pretpostavimo da smo definirali skupove K_i,M_i tako da vrijedi 4.1,4.2, za svaki $i = 1, \ldots, j-1$ gdje je $j \geq 1$.

Po prethodnoj lemi, vrijedi $d(K_{j-1}, M_{j_1}) > 0$. Kako je X kompaktan, to postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}'_j$ prostora X takav da je $mesh\mathcal{U}'_j < \min\{\frac{1}{j}, d(K_{j-1}, M_{j-1})\}$. Kako je $dimX = n$, to postoji konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{U}_j = (U_{j,l}, l \in \{1, \ldots, m_j\})$ od $\mathcal{U}'_j$ takvo da je $ord\mathcal{U}_j \leq n$. Očito je $mesh\mathcal{U}_j < \min\{\frac{1}{j}, d(K_{j-1}, M_{j-1})\}$.

Neka je $K_j := X \setminus H_j$ i $M_j = X \setminus G_j$, gdje su

$$G_j := \bigcup\{U_{j,l} : l \in \{1, \ldots, m_j\}, ClU_{j,l} \cap M_{j-1} = \emptyset\}$$

i

$$H_j := \bigcup\{U_{j,l} : l \in \{1, \ldots, m_j\}, ClU_{j,l} \cap M_{j-1} \neq \emptyset\}.$$

Primijetimo da je $G_j \cup H_j = X$. Nadalje,primijetimo da je $G_j \neq \emptyset$. Doista, kako je $\mathcal{U}_j$ pokrivač prostora X, to sigurno postoji član $U \neq \emptyset$ tog pokrivača takav da je $U \cap K_{j-1} \neq \emptyset$. Pa, neka je $y \in U \cap K_{j-1}$. Tvrdimo da je $ClU \cap M_{j-1} = \emptyset$. Kada bi postojao $z \in ClU \cap M_{j-1}$, onda bi $diamU = diamClU \geq d(y, z) > d(K_{j-1}, M_{j-1})$, što je u kontradikciji s $mesh\mathcal{U}_j < \min\{\frac{1}{j}, d(K_{j-1}, M_{j-1})\}$. Dakle, $\emptyset \neq U \subseteq G_j$.

Vrijedi $ClG_j \cap M_{j-1} = \emptyset = ClH_j \cap K_{j-1}$. Naime, $ClG_j = \bigcup\{ClU_{j,l} : l \in \{1, \ldots, m_j\}, ClU_{j,l} \cap M_{j-1} = \emptyset\}$ i $ClH_j = \bigcup\{ClU_{j,l} : l \in \{1, \ldots, m_j\}, ClU_{j,l} \cap M_{j-1} \neq \emptyset\}$.

Odavde slijedi $K_{j-1} \subseteq X \setminus ClH_j = X \setminus Cl(X \setminus K_j) = IntK_j$ i $M_{j-1} \subseteq X \setminus ClG_j = X \setminus Cl(X \setminus M_j) = IntM_j$. Nadalje, $K_j \cap M_j = (X \setminus H_j) \cap (X \setminus G_j) = X \setminus (H_j \cup G_j) = X \setminus X = \emptyset$. Dakle, za $i = j$ vrijedi 4.1.

Familija $\mathcal{W}_j = (U_{j,l} \cap L_j : l \in \{1, \ldots, m_j\}, ClU_{j,l} \cap M_{j-1} \neq \emptyset)$ je otvoren pokrivač skupa $L_j := X \setminus (K_j \cup M_j) = X \setminus ((X \setminus H_j) \cup (X \setminus G_j) = X \setminus (X \setminus (H_j \cap G_j)) = H_j \cap G_j$. Naime, za svaki $y \in L_j$, vrijedi $y \in L_j = H_j \cap G_j \subseteq H_j = \bigcup\{U_{j,l} : l \in \{1, \ldots, m_j\}, ClU_{j,l} \cap M_{j-1} \neq \emptyset\}$, pa postoji $l \in \{1, \ldots, m_j\}$ takav da je $y \in U_{j,l}$ i $ClU_{j,l} \cap M_{j-1} \neq \emptyset$. Sada je $y \in U_{j,l} \cap L_j$, pa je $\mathcal{W}_j$ pokrivač prostora L_j. Kako je $U_{j,l} \subseteq X$ otvoren u X to je $U_{j,l} \cap L_j \subseteq L_j$ otvoren u L_j, za svaki $l \in \{1, \ldots, m_j\}$ pa je $\mathcal{W}_j$ otvoren pokrivač prostora L_j. Kako je $meshU_j < \frac{1}{j}$, to je $diamU_{j,l} < \frac{1}{j}$, za svaki $l \in \{1, \ldots, m_j\}$, pa je $mesh\mathcal{W}_j < \frac{1}{j}$.

Tvrdimo da je $ord\mathcal{W}_j \leq n - 1$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji n različitih članova $U_{j,l_1}, \ldots, U_{j,l_n}$ pokrivača $\mathcal{W}_j$ tako da je $\bigcap\limits_{m=1}^{n}(U_{j,l_m} \cap L_j) = (\bigcap\limits_{m=1}^{n} U_{j,l_m}) \cap L_j \neq \emptyset$, tj. n različitih članova $U_{j,l_1}, \ldots, U_{j,l_n}$ pokrivača $\mathcal{U}_j$ tako da je $\bigcap\limits_{m=1}^{n}(U_{j,l_m} \cap L_j) = (\bigcap\limits_{m=1}^{n} U_{j,l_m}) \cap L_j \neq \emptyset$ i $ClU_{j,l_1} \cap M_{j-1}, \ldots, ClU_{j,l_n} \cap M_{j-1} \neq \emptyset$.

Tada postoji $y \in (\bigcap_{m=1}^{n} U_{j,l_m}) \cap L_j$, pa je $y \in L_j \subseteq G_j$. Odavde slijedi da postoji član U pokrivača $\mathcal{U}_j$ takav da je $y \in U$ i $ClU \cap M_{j-1} = \emptyset$. Kako je $ord\mathcal{U}_j \leq n$ i $y \in U \cap (\bigcap_{m=1}^{n} U_{j,l_m}) \neq \emptyset$, to je $U = U_{j,l_m}$, za neki $m \in \{1, \ldots, n\}$. Dakle, $ClU_{j,l_m} \cap M_{j-1} \neq$ i $ClU_{j,l_m} \cap M_{j-1} = \emptyset$, što je kontradikcija. Prema tome vrijedi $ord\mathcal{W}_j \leq n-1$.

Time je zadovoljen i uvjet 4.2 za $i = j$, pa smo konstruirali nizove $(K_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$,$(M_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ s traženim svojstvima.

Neka su $K := \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} K_i$ i $M := \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} M_i$. Tvrdimo da su $K, M \subseteq X$ otvoreni u X. Vrijedi $K := \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} K_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} IntK_i$. S druge strane $K := \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} K_i \supseteq K := \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} IntK_i \supseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} IntK_i$, pa je $K = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} IntK_i$. Dakle, $K \subseteq X$ je otvoren u X. Slično, vrijedi $M := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} IntM_i$, pa je i $M \subseteq X$ otvoren.

Nadalje, K i M su disjunktni. Pretpostavimo da je $y \in K \cap M = (\bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} K_i) \cap (\bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} M_i)$. Onda postoje $i, j \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $y \in K_i \cap M_j \subseteq K_{\max\{i,j\}} \cap M_{\max\{i,j\}} = \emptyset$, što je kontradikcija. Dakle, $K \cap M = \emptyset$.

Očito je $x \in K$ i $B \subseteq M$. Neka je $L := X \setminus (K \cup M) = X \setminus (\bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} (K_i \cup M_i)) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}_0} (X \setminus (K_i \cup M_i)) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}_0} L_i$.

Dokažimo da je $dimL \leq n-1$. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan i $i \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{i} < \epsilon$. Po 4.2, L_i ima konačan otvoren pokrivač $\mathcal{W}_i$ takav da $mesh\mathcal{W}_i < \frac{1}{i}$ i $ord\mathcal{W}_i \leq n-1$. Sada je $\mathcal{W}_i|L$ konačan otvoren pokrivač od L za koji vrijedi $mesh\mathcal{W}_i|L \leq mesh\mathcal{W}_i < \frac{1}{i} < \epsilon$ i $ord\mathcal{W}_i|L \leq ord\mathcal{W}_i \leq n-1$. Iz Teorema 3.27, slijedi $dimL \leq n-1$.

Po pretpostavci indukcije, vrijedi $indL \leq n-1$, pa je, po Propoziciji 1.13, $indX \leq n = dimX$. Time je lema u potpunosti dokazana. ∎

Teorem 4.21 (Teorem o jednakosti dimenzija) *Za svaki separabilan metrizabilan prostor X vrijedi $indX = IndX = dimX$.*

Dokaz. Po Teoremu 4.2, vrijedi $indX = IndX$, a po Lemi 4.18, $dimX \leq$

$indX$. Prema tome, dovoljno je pokazati da je $indX \leq dimX$. Po Teoremu kompaktifikacije (Teorem 4.16), postoji kompaktifikacija $(\tilde{X}, i)$ od X takva da je $dim\tilde{X} \leq dimX$. Iz Leme 4.20 slijedi $ind\tilde{X} \leq dim\tilde{X}$. Po Teoremu o potprostoru (Teorem 1.6) je $ind(i(X)) \leq ind\tilde{X}$, a kako je mala induktivna dimenzija topološka invarijanata u klasi regularnih prostora (Teorem 1.4), to je $indX = ind(i(X))$. Dakle, vrijedi

$$indX = ind(i(X)) \leq ind\tilde{X} \leq dim\tilde{X} = dimX.$$

Iz toga slijedi $IndX = indX = dimX$. ■

4.4 Relacije između velike induktivne dimenzije i dimenzije pokrivanja

U ovom odjeljku dokazat ćemo da, za svaki normalan prostor X, vrijedi $dimX \leq IndX$, te da se u klasi metrizabilnih prostora podudaraju velika induktivna dimenzija i dimenzija pokrivanja.

Lema 4.22 *Neka je X normalan prostor i $n \in \mathbb{N}_0$. Ako, za svaki par disjunktnih zatvorenih podskupova A, B prostora X, postoji separator L između A i B takav da je $dimL \leq n-1$, onda je $dimX \leq n$.*

Dokaz. Neka je $(U_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ konačan otvoren pokrivač prostora X. Po Lemi 3.10, $(U_i, i \in \{1, \ldots, k\})$ ima zatvoreno umanjenje $(F_i, i \in \{1, \ldots, k\})$. Po pretpostavci, za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$, postoji separator L_i između F_i i $X \setminus U_i$, takav da je $dimL_i \leq n-1$. Za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$, neka su $W_i, W_i' \subseteq X$ otvoreni skupovi u X takvi da vrijedi $F_i \subseteq W_i$, $X \setminus U_i \subseteq W_i'$, $W_i \cap W_i' = \emptyset$ i $X \setminus L_i = W_i \cap W_i'$. Tada je, po Napomeni 1.11, $FrW_i \subseteq L_i$.

Nadalje, $F_i \subseteq W_i \subseteq X \setminus W_i' \subseteq U_i$. Kako je $L := \bigcup_{i=1}^{k} L_i$ zatvoren potprostor od X, to je L normalan prostor. Nadalje, za zatvorene skupove L_i u L vrijedi $dimL_i \leq n-1$, za svaki $i \in \{1,\ldots,k\}$, pa, po Teoremu sume za dimenziju pokrivanja 3.22, vrijedi $dimL \leq n-1$. Neka je $(G_i, i \in \{1,\ldots,k\})$ zatvoreno umanjenje otvorenog pokrivača $(L \cap U_i, i \in \{1,\ldots,k\})$ prostora L reda manjeg ili jednakog $n-1$. Kako je L zatvoren u X i G_i zatvoren u L, to je G_i zatvoren u X, za svaki $i \in \{1,\ldots,k\}$. Po Teoremu 3.11, postoji uvećanje $(V_i', i \in \{1,\ldots,k\})$ familije $(G_i, i \in \{1,\ldots,k\})$, tako da vrijedi $G_i \subseteq V_i' \subseteq ClV_i' \subseteq U_i$, za svaki $i \in \{1,\ldots,k\}$. Vrijedi $ord(V_i', i \in \{1,\ldots,k\}) \leq n-1$. Ponovo koristeći Teorem 3.11, dolazimo do familije $(V_i, i \in \{1,\ldots,k\})$ otvorenih podskupova $V_i \subseteq X$, tako da vrijedi $G_i \subseteq V_i \subseteq ClV_i \subseteq V_i' \subseteq U_i$, za svaki $i \in \{1,\ldots,k\}$. Kako je $ord(V_i', i \in \{1,\ldots,k\}) \leq n-1$ i $ord(G_i, i \in \{1,\ldots,k\}) \leq n-1$, to je $ord(V_i, i \in \{1,\ldots,k\}) \leq n-1$. Neka je $V := \bigcup_{i=1}^{k} V_i$. Tada vrijedi

$$L = \bigcup_{i=1}^{k} G_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V_i = V.$$

Za svaki $i \in \{1,\ldots,k\}$, definirajmo $Z_i := ClW_i \setminus (V \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} W_j)$. Familija $(ClV_1,\ldots,ClV_k, Z_1,\ldots,Z_k)$ je zatvoreno profinjenje pokrivača $(U_i, i \in \{1,\ldots,k\})$. Doista, neka je $x \in X$ proizvoljan. Ako je $x \in V$, onda postoji $i \in \{1,\ldots,k\}$ takav da je $x \in V_i \subseteq ClV_i$. Pretpostavimo da je $x \notin V$. Neka je $i(x) := \min\{i \in \{1,\ldots,k\} : x \in W_i\}$. Takav $i(x)$ sigurno postoji jer je $(F_i, i \in \{1,\ldots,k\})$ pokrivač prostora X i $F_i \subseteq W_i$, za svaki $i \in \{1,\ldots,k\}$. Tada vrijedi $x \in W_{i(x)} \subseteq ClW_{i(x)}$, te $x \notin W_j$, za svaki $j < i(x)$. Iz definicije $Z_{i(x)}$, slijedi $x \in Z_{i(x)}$. Nadalje, za proizvoljan $i \in \{1,\ldots,k\}$ vrijedi $ClV_i \subseteq U_i$, te

$Z_i = ClW_i \setminus (V \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} W_j) \subseteq ClW_i \setminus V \subseteq ClW_i \setminus L \subseteq ClW_i \setminus L_i \subseteq ClW_i \setminus FrW_i =$

$IntW_i = W_i \subseteq U_i$. Dokažimo još da je $ord(ClV_1, \ldots, ClV_k, Z_1, \ldots, Z_k) \leq n$.
Za svaki $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, takav da je $j < i$ vrijedi
$Z_j \cap Z_i \subseteq ClW_j \cap (ClW_i \setminus (V \cup W_j)) \subseteq ClW_j \cap ClW_i \cap (X \setminus V) \cap (X \setminus W_j) =$
$ClW_i \cap FrW_j \cap (X \setminus V) \subseteq FrW_j \setminus V = \emptyset$.
Neka su $Y_1, \ldots, Y_{n+2}$ međusobno različiti članovi pokrivača $(ClV_1, \ldots, ClV_k, Z_1, \ldots, Z_k)$. Ako postoje $i, j \in \{1, \ldots, n+2\}$ takvi da je $Y_i = Z_{i'}$ i $Y_j = Z_{j'}$, za neke $i', j' \in \{1, \ldots, k\}$ onda je $Y_1 \cap \cdots \cap Y_{n+2} \subseteq Y_i \cap Y_j = \emptyset$. Zato, bez gubitka općenitosti, pretpostavimo da postoje $i_1, \ldots, i_{n+1} \in \{1, \ldots, k\}$ takvi da vrijedi $Y_1 = ClV_{i_1}, \ldots, Y_{n+1} = ClV_{i_{n+1}}$. Kako je $ord(ClV_i, i \in \{1, \ldots, k\}) \leq n-1$, to je $Y_1 \cap \cdots \cap Y_{n+2} \subseteq Y_1 \cap \cdots \cap Y_{n+1} = \emptyset$. Dakle, $ord(ClV_1, \ldots, ClV_k, Z_1, \ldots, Z_k) \leq n$. Iz Propozicije 3.12 slijedi $dimX \leq n$.
■

Teorem 4.23 *Za svaki normalan prostor X vrijedi $dimX \leq IndX$.*

Dokaz. Neka je X normalan prostor. Ako je $IndX = \infty$, tvrdnja očito vrijedi. Pa, pretpostavimo da je $IndX = n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. U ovom slučaju dokaz provodimo indukcijom po $n = IndX$. Pretpostavimo da je $IndX = -1$. Tada je $X = \emptyset$, pa je $dimX = -1 \leq IndX$. Pretpostavimo da, za svaki normalan prostor Y velike induktivne dimenzije strogo manje od $n \geq 0$, vrijedi $dimY \leq IndY$, te neka je $IndX = n$. Po Teoremu 2.6, za svaki par disjunktnih zatvorenih podskupova A, B prostora X, postoji separator L između A i B takav da je $IndL \leq n-1$. Po pretpostavci indukcije, vrijedi $dimL \leq IndL \leq n-1$. Iz prethodne leme slijedi $dimX \leq n = IndX$. ■

Definicija 4.24 *Neka je $\mathcal{W} = (W_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ pokrivač topološkog prostora X. Za svaki $\lambda_0 \in \Lambda$, zvijezda skupa W_{λ_0} s obzirom na pokrivač $\mathcal{W}$, u oznaci $St(W_{\lambda_0}, \mathcal{W})$, je skup $\bigcup\{W_\lambda : \lambda \in \Lambda, W_\lambda \cap W_{\lambda_0} \neq \emptyset\}$.*

Lema 4.25 *Neka je X normalan prostor , $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$ i $(\mathcal{W}_i = (W^i_\lambda, \lambda \in \Lambda_i))_{i \in \mathbb{N}}$ niz otvorenih pokrivača prostora X tako da vrijedi:*

(i) $ord \mathcal{W}_i \leq n$, za svaki $i \in \mathbb{N}$.

(ii) $\mathcal{W}_{i+1}$ je profinjenje od $\mathcal{W}_i$, za svaki $i \in \mathbb{N}$.

(iii) Za svaku točku $x \in X$, množina $\{St(W^i_\lambda, \mathcal{W}_i) : \lambda \in \Lambda_i, x \in W^i_\lambda, i \in \mathbb{N}\}$ je lokalna baza prostora X u točki x.

Tada je $dim X \leq n$.

Dokaz. Bez gubitka općenitosti pretpostavimo da su, za svaki $i \in \mathbb{N}$ članovi pokrivača $\mathcal{W}_i$ međusobno različiti.

Neka je $i \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Kako je $\mathcal{W}_{i+1}$ profinjenje od $\mathcal{W}_i$, to, za svaki W^{i+1}_λ, postoji $W^i_{\mu_i(\lambda)}$ takav da je $W^{i+1}_\lambda \subseteq W^i_{\mu_i(\lambda)}$. Definirajmo preslikavanje $f^{i+1}_i : \{W^{i+1}_\lambda, \lambda \in \Lambda_{i+1}\} \to \{W^i_\lambda, \lambda \in \Lambda_i\}$

$$f^{i+1}_i(W^{i+1}_\lambda) = W^i_{\mu_i(\lambda)}.$$

Tada je očito $W^{i+1}_\lambda \subseteq f(W^{i+1}_\lambda)$, za svaki $\lambda \in \Lambda_{i+1}$ Nadalje, za svaki $k \in \mathbb{N}, k > i$, neka je $f^k_i = \{W^k_\lambda, \lambda \in \Lambda_k\} \to \{W^i_\lambda, \lambda \in \Lambda_i\}$,

$$f^k_i = f^{i+1}_i \circ f^{i+2}_{i+1} \circ \cdots \circ f^k_{k-1}$$

i $f^i_i = id_{\{W^i_\lambda, \lambda \in \Lambda_i\}}$. Vrijedi :

$W^k_\lambda \subseteq f^k_{k-1}(W^k_\lambda) = W^{k-1}_{\mu_{k-1}(\lambda)} \subseteq$

$\subseteq f^{k-1}_{k-2}(W^{k-1}_{\mu_{k-1}(\lambda)}) = W^{k-2}_{\mu_{k-2}(\mu_{k-1}(\lambda))} \subseteq \cdots \subseteq$

$\subseteq f^{i+2}_{i+1}(W^{i+2}_{\mu_{i+2}(\ldots(\mu_{k-1}(\lambda))\ldots)}) = W^{i+1}_{\mu_{i+1}(\ldots(\mu_{k-1}(\lambda))\ldots)} \subseteq$

$\subseteq f^{i+1}_i(W^{i+1}_{\mu_{i+1}(\ldots(\mu_{k-1}(\lambda))\ldots)}) = f^{i+1}_i(f^{i+2}_{i+1}(\ldots(f^k_{k-1}(W^k_\lambda))\ldots)) = f^k_i(W^k_\lambda)$, za svaki $\lambda \in \Lambda_k$ i $i \leq k$.

Neka je $(H_j, j \in \{1, \dots, l\})$ konačan otvoren pokrivač prostora X. Za svaki $k \in \mathbb{N}$, definirajmo

$$X_k := \bigcup\{W_\lambda^k : (\exists j \in \{1, \dots, l\})\ St(W_\lambda^k, \mathcal{W}_k) \subseteq H_j\}$$

Dokažimo da je $(X_k, k \in \mathbb{N})$ otvoren pokrivač prostora X. Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. $X_k \subseteq X$ je otvoren kao unija otvorenih skupova.
Nadalje, za $x \in X$, po volji odabran postoji $j \in \{1, \dots, l\}$ takav da je $x \in H_j$, jer je $(H_j, j \in \{1, \dots, l\})$ pokrivač prostora X. Po pretpostavci je množina $\{St(W_\lambda^i, \mathcal{W}_i) : \lambda \in \Lambda_i, x \in W_\lambda^i, i \in \mathbb{N}\}$ lokalna baza prostora X u točki x, pa postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in St(W_\lambda^k, \mathcal{W}_k) \subseteq H_j$. Iz definicije X_k slijedi $x \in X_k$, pa je $(X_k, k \in \mathbb{N})$ otvoren pokrivač prostora X.
Za svaki $k \in \mathbb{N}$, definirajmo

$$\mathcal{U}_k := \{W_\lambda^k : \lambda \in \Lambda, W_\lambda^k \cap X_k \neq \emptyset\}$$

i

$$\mathcal{V}_k := \{V \in \mathcal{U}_k : V \cap (\bigcup_{j<k} X_j) = \emptyset\}.$$

Za svaki $U \in \mathcal{U}_k$, neka je $i(U)$ najmanji prirodan broj manji ili jednak k takav da je $f_i^k(U) \cap X_k \neq \emptyset$. Takav sigurno postoji jer je $f_k^k(U) \cap X_k = U \cap X_k \neq \emptyset$.
Dokažimo da vrijedi:

$$f_{i(U)}^k(U) \in \mathcal{V}_{i(U)}.$$

Skup $f_{i(U)}^k(U)$ je član pokrivača $\mathcal{W}_{i(U)}$. Nadalje, iz definicije od $i(U)$ slijedi da je $f_{i(U)}^k(U) \cap X_k \neq \emptyset$ i $f_{i(U)}^k(U) \cap (\bigcup\limits_{j<k} X_j) = \emptyset$, pa je $f_{i(U)}^k(U) \in \mathcal{V}_{i(U)}$, po definiciji od $\mathcal{V}_{i(U)}$.
Za svaki $i \in \mathbb{N}$ i $V \in \mathcal{V}_i$, neka je

$$V^* := \bigcup_{k=i}^{\infty} \bigcup\{U \cap X_k : U \in \mathcal{U}_k, f_i^k(U) = V \text{ i } i(U) = i\}.$$

Neka su $i \in \mathbb{N}$ i $V \in \mathcal{V}_i$ proizvoljni. Kako je $V \cap X_i \neq \emptyset$ (jer je $V \in \mathcal{U}_i$) to, po definiciji od X_i, postoji član W^i_λ pokrivača $\mathcal{W}_i$ takav da je $V \cap W^i_\lambda \neq \emptyset$ i $j(V) \in \{1, \ldots, l\}$ takav da je $St(W^i_\lambda, \mathcal{W}_i) \subseteq H_{j(V)}$. Nadalje, budući da je $V \cap W^i_\lambda \neq \emptyset$ i V član pokrivača $\mathcal{W}_i$, to je $V \subseteq St(W^i_\lambda, \mathcal{W}_i)$.

Nadalje, vrijedi $V^* \subseteq V$ jer, za svaki $U \in \mathcal{U}_k$, je, po prije dokazanom, $U \cap X_k \subseteq U \subseteq f^k_i(U) = V$. Odavde slijedi da je $V^* \subseteq H_{j(V)}$.

Kako je $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \emptyset$, čim je $i \neq j$, to su, za svaki $V \in \mathcal{V} := \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_i$, dobro definirani V^* i $j(V)$.

Dokažimo da je $(V^*, V \in \mathcal{V})$ pokrivač prostora X.

Neka je $x \in X$ proizvoljna točka. Kako je $(X_k, k \in \mathbb{N})$ pokrivač prostora X, to postoji najmanji prirodni broj $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x \in X_k \setminus (\bigcup_{j<k} X_j).$$

Budući da je $\mathcal{W}_k$ pokrivač prostora X, postoji član W^k_λ od $\mathcal{W}_k$ takav da je $x \in W^k_\lambda$. Kako je $x \in W^k_\lambda \cap X_k \neq \emptyset$, to je $W^k_\lambda \in \mathcal{U}_k$. Sada je $x \in U \cap X_k \subseteq (f^k_{i(U)}(U))^*$, pa je $(V^*, V \in \mathcal{V})$ pokrivač prostora X.

Pretpostavimo da su $V_1, \ldots, V_h \in \mathcal{V}$ međusobno različiti elementi od $\mathcal{V}$ takvi da vrijedi $V_i \in \mathcal{V}_{m_i}$, za $m_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, h\}$, i $V^*_1 \cap \cdots \cap V^*_h \neq \emptyset$. Dokažimo da je $h \leq n$. Neka je $x \in V^*_1 \cap \cdots \cap V^*_h$ i $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x \in X_k \setminus (\bigcup_{j<k} X_j).$$

Iz definicije $\mathcal{V}_{m_i}$ i činjenice da je $V^*_{m_i} \subseteq V_{m_i}$, za svaki $i = 1, \ldots, h$, slijedi da je $m_i \leq k$, za svaki $i = 1, \ldots, h$. Naime, za proizvoljan $i \in \{1, \ldots, h\}$, budući da je $V^*_{m_i} \subseteq V_{m_i}$, to je $x \in V_{m_i}$. Kako je $V_{m_i} \in \mathcal{V}_{m_i}$, to je $V \cap \left(\bigcup\limits_{j<m_i} X_j \right) = \emptyset$. Budući da vrijedi $x \in V \cap X_k$, zaključujemo da je $m_i \leq k$. Iz definicije V^*_i slijedi da postoji skup $U_i \in \mathcal{U}_{k_i}$ takav da je $f^{k_i}_{m_i}(U_i) = V_i$, $i(U_i) = m_i$ i $x \in U_i \cap X_{k_i}$. Kako je $x \in X_{k_i}$ i $x \in X_k \setminus (\bigcup\limits_{j<k} X_j)$, to je $k \leq k_i$.

Skupovi $W_i := f_k^{k_i}(U_i), i \in \{1, \dots, h\}$ sadrže točku x. Naime, po prije dokazanom, vrijedi $x \in U_i \subseteq f_k^{k_i}(U_i) = W_i$. Nadalje, W_i je, očito, član od $\mathcal{W}_k$, za svaki $i = 1, \dots, h$. Kako je $ord\mathcal{W}_k \leq n$, da bi pokazali da je $h \leq n$, dovoljno je pokazati da je $W_i \neq W_j$, kad god je $i \neq j$, gdje su $i, j \in \{1, \dots, k\}$.

Primjetimo da je $W_i \in \mathcal{U}_k$ jer je $x \in W_i \cap X_k \neq \emptyset$. Dokažimo da je $i(W_i) = i(U_i)$. Kako je $k_i \geq k$, to je $\mathcal{W}_{k_i}$ profinjenje od $\mathcal{W}_k$. Nadalje vrijedi $X_{k_i} \subseteq X_k$. Naime, za proizvoljan član $W_\lambda^{k_i}$ pokrivača $\mathcal{W}_{k_i}$, postoji član W_μ^k pokrivača $\mathcal{W}_k$ takav da je $W_\lambda^{k_i} \subseteq W_\mu^k$. Sada je $St(W_\lambda^{k_i}, \mathcal{W}_{k_i}) \subseteq St(W_\mu^k, \mathcal{W}_k)$ jer, za svaki $\lambda' \in \Lambda_{k_i}$ takav da je $W_\lambda^{k_i} \cap W_{\lambda'}^{k_i} \neq \emptyset$, postoji $\mu' \in \Lambda_k$ takav da je $W_{\lambda'}^{k_i} \subseteq W_{\mu'}^k$ i vrijedi $W_{\mu'}^k \cap W_\mu^k \supseteq W_{\lambda'}^{k_i} \cap W_\lambda^{k_i} \neq \emptyset$.

Sada je:

$$f_{i(U_i)}^k(W_i) \cap X_k = f_{i(U_i)}^k(f_k^{k_i}(U_i)) \cap X_k = f_{i(U_i)}^{k_i}(U_i) \cap X_k \subseteq f_{i(U_i)}^{k_i}(U_i) \cap X_{k_i} \neq \emptyset,$$

pa zaključujemo da je $i(W_i) \leq i(U_i)$.

Nadalje, vrijedi

$$x \in W_i \cap X_{k_i} \subseteq f_{i(W_i)}^k(W_i) \cap X_{k_i} = f_{i(W_i)}^k(f_k^{k_i}(U_i)) \cap X_{k_i} = f_{i(W_i)}^{k_i}(U_i) \cap X_{k_i}.$$

Dakle, $f_{i(W_i)}^{k_i}(U_i) \cap X_{k_i} \neq \emptyset$. Odavde slijedi $i(U_i) \leq i(W_i)$, odnosno $i(W_i) = i(U_i) = m_i$. Čim je $i(W_i) = m_i \neq m_j = i(W_j)$, za $i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j$, vrijedi $W_i \neq W_j$. Ako su $i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j$, takvi da je $m_i = m_j$ onda je

$$f_{m_i}^k(W_i) = f_{m_i}^k(f_k^{k_i}(U_i)) = f_{m_i}^{k_i}(U_i) = V_i \neq V_j = f_{m_j}^{k_j}(U_j) = f_{m_j}^k(f_k^{k_j}(U_j)) = f_{m_j}^k(W_j) = f_{m_i}^k(W_j),$$

pa je i u ovom slučaju $W_i \neq W_j$.

Time smo dokazali da je $W_i \neq W_j$, kad god je $i \neq j$, gdje su $i, j \in \{1, \dots, k\}$, a time i da je $h \leq n$.

Da bi dokazali da je $dimX \leq n$, dovoljno je dokazati da je familija $(V_j := \bigcup\{V^* : V \in \mathcal{V} \text{ i } j(V) = j\}, j \in \{1, \dots, l\})$ umanjenje pokrivača $(H_j, j \in \{1, \dots, l\})$ reda $ord(V_j, j \in \{1, \dots, l\}) \leq n$. Već smo dokazali da je $V^* \subseteq$

$H_{j(V)}$, pa je $V_j \subseteq H_j$, za svaki $j \in \{1, \ldots, l\}$. Dakle, preostaje nam dokazati da je $(V_j, j \in \{1, \ldots, l\})$ pokrivač prostora X i $ord(V_j, j \in \{1, \ldots, l\}) \leq n$. Kako je $(V^*, V \in \mathcal{V})$ pokrivač prostora X to je očito i $(V_j, j \in \{1, \ldots, l\})$ pokrivač prostora X. Neka su $V_{j_1}, \ldots, V_{j_h}$ međusobno različiti članovi pokrivača $(V_j, j \in \{1, \ldots, l\})$ takvi da je $V_{j_1} \cap \cdots \cap V_{j_h} \neq \emptyset$. Tada postoje međusobno različiti $V'_{j_1}, \ldots, V'_{j_h} \in \mathcal{V}$ takvi da je $(V'_{j_1})^* \cap \cdots \cap (V'_{j_h})^* \neq \emptyset$ i $j(V'_{j_1}) = j_1, \ldots, j(V'_{j_h}) = j_h$. Iz prije dokazanog slijedi $h \leq n$. Odavde slijedi $ord(V_j, j \in \{1, \ldots, l\}) \leq n$, odnosno $dimX \leq n$. ■

Propozicija 4.26 *Neka je X metrizabilan prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $dimX \leq n$

(ii) Za svaku metriku d koja metrizira toplogiju na X, postoji niz $(\mathcal{U}_i = (U^i_\lambda, \lambda \in \Lambda_i))_{i\in\mathbb{N}}$ lokalno konačnih otvorenih pokrivača prostora X tako da, za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $mesh\mathcal{U}_i < \frac{1}{i}$, $ord\mathcal{U}_i \leq n$ i, za svaki $\lambda \in \Lambda_{i+1}$, postoji $\mu \in \Lambda_i$ takav da je $ClU^{i+1}_\lambda \subseteq U^i_\mu$.

(iii) Postoji metrika d koja metrizira toplogiju na X, te postoji niz $(\mathcal{W}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ otvorenih pokrivača prostora X tako da, za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $mesh\mathcal{W}_i < \frac{1}{i}$, $ord\mathcal{W}_i \leq n$ i $\mathcal{W}_{i+1}$ je profinjenje od $\mathcal{W}_i$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Neka je $dimX \leq n$ i d proizvoljna metrika koja metrizira toplogiju na X. Induktivno ćemo definirati niz $(\mathcal{U}_i = (U^i_\lambda, \lambda \in \Lambda_i))_{i\in\mathbb{N}}$ lokalno konačnih otvorenih pokrivača prostora X tako da, za svaki $i \in \mathbb{N}$, vrijedi $mesh\mathcal{U}_i < \frac{1}{i}$, $ord\mathcal{U}_i \leq n$ i, za svaki $\lambda \in \Lambda_{i+1}$, postoji $\mu \in \Lambda_i$ takav da je $ClU^{i+1}_\lambda \subseteq U^i_\mu$. Familija $(B(x, \frac{1}{3}), x \in X)$ je otvoren pokrivač prostora X za koji vrijedi $mesh(B(x, \frac{1}{3}), x \in X) < 1$. Po Propoziciji 3.13, $(B(x, \frac{1}{3}), x \in X)$ ima otvoreno profinjenje $\mathcal{U}_1$ reda manjeg ili jednakog n. Očito vrijedi

$mesh\mathcal{U}_1 < 1$. Pretpostavimo da smo definirali lokalno konačne otvorene pokrivače $\mathcal{U}_i$ prostora X, za svaki $i \leq k > 1$. Za proizvoljnu točku $x \in X$, postoji član U pokrivača $\mathcal{U}_{k-1}$ takav da je $x \in U$. Kako je svaki metrički prostor regularan, to postoji okolina U_x točke x takva da je $ClU_x \subseteq U$. Familija $(U_x \cap B(x, \frac{1}{3k}), x \in X)$ je otvoren pokrivač prostora X, za koji vrijedi $mesh(U_x \cap B(x, \frac{1}{3k}), x \in X) < \frac{1}{k}$. Po Propoziciji 3.13, pokrivač $(U_x \cap B(x, \frac{1}{3k}), x \in X)$ ima otvoreno profinjenje $\mathcal{U}_k$ reda manjeg ili jednakog n. Očito je $mesh\mathcal{U}_k < \frac{1}{k}$. Nadalje, za svaki član V pokrivača $\mathcal{U}_k$ postoji član $U_x \cap B(x, \frac{1}{3k})$ pokrivača $(U_x \cap B(x, \frac{1}{3k}), x \in X)$ takav da je $V \subseteq U_x \cap B(x, \frac{1}{3k})$. Odavde slijedi da je $ClV \subseteq Cl(U_x \cap B(x, \frac{1}{3k})) \subseteq ClU_x \subseteq U$. Time je tvrdnja (ii) dokazana.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Očito.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Pretpostavimo da postoje metrika d koja metrizira toplogiju na X i niz $(\mathcal{W}_i = (W^i_\lambda, \lambda \in \Lambda_i))_{i \in \mathbb{N}}$ otvorenih pokrivača prostora X, tako da ,za svaki $i \in \mathbb{N}$, vrijedi $mesh\mathcal{W}_i < \frac{1}{i}, ord\mathcal{W}_i \leq n$ i $\mathcal{W}_{i+1}$ je profinjenje od $\mathcal{W}_i$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Neka je $x \in X$ proizvoljna točka i $\epsilon > 0$ po volji odabran. Neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $i > \frac{2}{\epsilon}$. Kako je $\mathcal{W}_i$ pokrivač prostora X, to postoji član W^i_λ, pokrivača $\mathcal{W}_i$, takav da je $x \in W^i_\lambda$. Za proizvoljnu točku $y \in St(W^i_\lambda, \mathcal{W}_i)$, postoji članov $W^i_{\lambda'}$ pokrivača $\mathcal{W}_i$ takav da je $y \in W^i_{\lambda'}$ i $W^i_\lambda \cap W^i_{\lambda'} \neq \emptyset$. Neka je $z \in W^i_\lambda \cap W^i_{\lambda'}$. Sada je $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2mesh\mathcal{W}_i < \epsilon$. Odavde slijedi da je $St(W^i_\lambda, \mathcal{W}_i) \subseteq B(x, \epsilon)$. Dakle,$\{St(W^i_\lambda, \mathcal{W}_i) : \lambda \in \Lambda_i, x \in W^i_\lambda, i \in \mathbb{N}\}$ je lokalna baza u točki x. Iz pretohodne leme slijedi da je $dimX \leq n$. ■

U dokazu Teorema Katětova i Morite koristit ćemo Urysohnov teorem. Prisjetimo se:

Teorem 4.27 *Neka je X T_1 prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

(i) X je normalan.

(ii) Za svaki par disjunktnih nepraznih zatvorenih podskupova $A, B \subseteq X$, postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0,1]$ tako da je $f(A) \subseteq \{0\}$ i $f(B) \subseteq \{1\}$.

Teorem 4.28 (Teorem Katětova i Morite) *Neka je X metrizabilan prostor. Tada je $IndX = dimX$.*

Dokaz. Po Teoremu 4.23, vrijedi $dimX \leq IndX$. Dakle, dovoljno je dokazati da vrijedi $IndX \leq dimX$. Tvrdnja očito vrijedi ako je $dimX = \infty$. Zato, pretpostavimo da je $dimX = n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. U ovom slučaju, dokaz provodimo indukcijom po $n = dimX$. Ako je $n = dimX = -1$, onda je $X = \emptyset$, pa je $IndX = -1 \leq dimX$. Pretpostavimo da, za svaki metrizabilan prostor Y za koji je $dimY < n \geq 0$, vrijedi $IndY \leq dimY$, te neka je $dimX = n$. Neka su $A, B \subseteq X$ zatvoreni disjunktni podskupovi od X. Definirat ćemo otvorene skupove $K, M \subseteq X$, i $L = X \setminus (K \cup M)$, tako da vrijedi

$$A \subseteq K, \ B \subseteq M, \ K \cap M = \emptyset \text{ i } dimL \leq n - 1.$$

Ako je A ili B prazan skup, onda su traženi otvoreni skupovi X i $\emptyset$, pa pretpostavimo da su A i B neprazni. Kako je X metrizabilan, to je X normalan prostor, pa , po Urysonovom teoremu, postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0,1]$ tako da je $f(A) \subseteq \{0\}$ i $f(B) \subseteq \{1\}$. Neka je d' proizvoljna metrika koja metrizira topologiju na X. Definirajmo $d : X \times X \to \mathbb{R}$ s

$$d(x,y) = d'(x,y) + |f(x) - f(y)|, \text{ za } x, y \in X.$$

Tada je d metrika koja metrizira toplogiju na X. Doista, za svaki $x, y \in X$ je $d(x,y) = d'(x,y) + |f(x) - f(y)| \geq 0$, te $d(x,y) = d'(x,y) + |f(x) - f(y)| = d'(y,x) + |f(y) - f(x)| = d(y,x)$. Nadalje, ako je $0 = d(x,y) = d'(x,y) + |f(x) - f(y)|$, onda je $x = y$, te $d(x,x) = d'(x,x) + |f(x) - f(x)| = 0$. Također, vrijedi $d(x, z) = d'(x, z) + |f(x) - f(z)| \leq d'(x, y) + |f(x) - f(y)| + d'(y, z) + |f(y) - f(z)| = d(x, y) + d(y, z)$, za svaki $x, y, z \in X$. Dakle, d je metrika. Dokažimo još da su d i d' topološki ekvivalentne metrike. Kako je $d'(x, y) \leq d(x, y)$, za svaki $x, y \in X$, to je $1_{dd'} = idX : (X, d) \to (X, d')$ (uniformno) neprekidno preslikavanje. Dokažimo da je $1_{d'd} = idX : (X, d') \to (X, d)$ neprekidno preslikavanje. Neka je $x \in X$ proizvoljna točka i $\epsilon > 0$ po volji odabaran. Kako je f neprekidna funkcija, to postoji $\delta' > 0$ takav da vrijedi

$$d'(x, y) < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ za svaki } y \in X$$

Neka je $\delta := \min\{\frac{\epsilon}{2}, \delta'\}$. Tada , za svaki $y \in X$, vrijedi

$$d'(x, y) < \delta \Rightarrow d'(x, y) + |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dakle, d i d' su toploški ekvivalentne metrike, pa d metrizira početnu toplogiju na X. Od sada ćemo promatrati samo metriku d na X. Po Propoziciji 4.26, postoji niz $(\mathcal{U}_i = (U^i_\lambda, \lambda \in \Lambda_i))_{i \in \mathbb{N}}$ lokalno konačnih otvorenih pokrivača prostora X, takvih da , za svaki $i \in \mathbb{N}$, vrijedi $mesh\mathcal{U}_i < \frac{1}{i}$, $ord\mathcal{U}_i \leq n$, te za svaki $\lambda \in \Lambda_{i+1}$, postoji $\mu \in \Lambda_i$ takav da je $ClU^{i+1}_\lambda \subseteq U^i_\mu$.

Neka je $K_0 := A$, $M_0 := B$, te za svaki $i \in \mathbb{N}$, neka su $K_i := X \setminus H_i$ i $M_i := X \setminus G_i$, gdje su

$$G_i := \bigcup \{U^i_\lambda : \lambda \in \Lambda_i, ClU^i_\lambda \cap M_{i-1} = \emptyset\}$$

i

$$H_i := \bigcup \{U^i_\lambda : \lambda \in \Lambda_i, ClU^i_\lambda \cap M_{i-1} \neq \emptyset\}.$$

Primjetimo da je, za svaki $i \in \mathbb{N}$ i za svaki $\lambda \in \Lambda_i$, $U^i_\lambda \subseteq G_i$ ili $U^i_\lambda \subseteq H_i$.

$$\text{Ako je } ClU^i_\lambda \cap M_{i-1} \neq \emptyset, \text{ onda je } ClU^i_\lambda \cap K_{i-1} = \emptyset, \text{ za svaki } \lambda \in \Lambda_i. \quad (4.3)$$

Doista, za $i = 1$, kada bi $ClU^1_\lambda \cap M_0 = ClU^1_\lambda \cap B \neq \emptyset$ i $ClU^1_\lambda \cap K_0 = ClU^1_\lambda \cap A \neq \emptyset$,za neki $\lambda \in \Lambda_1$, onda bi postojali $x \in A \cap ClU^1_\lambda$ i $y \in ClU^1_\lambda \cap B$. Odavde bi slijedilo $f(x) = 0$ i $f(y) = 1$, pa bi $diamU_\lambda^1 = diamClU_\lambda^1 \geq d(x,y) \geq |f(x) - f(y)| = 1$, a to je u kontradikciji s $diamU_\lambda^1 \leq mesh\mathcal{U}_1 < 1$. Neka je $i \in \mathbb{N}, i > 1$ i $\lambda \in \Lambda_i$, takav da je $ClU_\lambda^i \cap M_{i-1} \neq \emptyset$. Tada za svaki $\mu \in \Lambda_{i-1}$, za koji je $ClU_\lambda^i \subseteq U_\mu^{i-1}$, vrijedi $U_\mu^{i-1} \cap M_{i-1} \neq \emptyset$. Iz definicije G_{i-1}, slijedi $U_\mu^{i-1} \nsubseteq G_{i-1}$, pa je $U_\mu^{i-1} \subseteq H_{i-1}$. Odavde slijedi $ClU_\lambda^i \subseteq U_\mu^{i-1} \subseteq H_{i-1} = X \setminus K_{i-1}$, pa je $ClU_\lambda^i \cap K_{i-1} = \emptyset$.

Vrijedi $ClG_i \cap M_{i-1} = \emptyset = ClH_i \cap K_{i_1}$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Neka je $i \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Po Lemi 3.14, vrijedi $ClG_i = \bigcup\{ClU_\lambda^i : \lambda \in \Lambda_i, ClU_\lambda^i \cap M_{i-1} = \emptyset\}$ i $ClH_i \bigcup\{ClU_\lambda^i : \lambda \in \Lambda_i, ClU_\lambda^i \cap M_{i-1} \neq \emptyset\}$. Dakle, $ClG_i \cap M_{i-1} = \emptyset$. Iz 4.3 slijedi $ClG_i \cap K_{i-1} = \emptyset$.

Odavde slijedi $K_{i-1} \subseteq X \setminus ClH_i = X \setminus Cl(X \setminus K_i) = IntK_i$ i $M_{i-1} \subseteq X \setminus ClG_i = X \setminus Cl(X \setminus M_i) = IntM_i$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Nadalje, kako je $G_i \cup H_i = X$, to je $K_i \cap M_i = (X \setminus H_i) \cap (X \setminus H_i) = X \setminus (H_i \cup G_i) = \emptyset$.

Definirajmo $K := \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}_0} K_i$ i $M := \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}_0} M_i$. Vrijedi $A = K_0 \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}_0} K_i = K$ i $B = M_0 \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}_0} M_i = M$. Nadalje, $K, M \subseteq X$ su otvoreni. Doista, kako je $K_0 \subseteq IntK_1 \subseteq K_1$, to je $IntK = Int(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}_0} K_i) \supseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}_0} IntK_i \supseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}_0} K_{i+1} = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} K_i = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}_0} K_i = K$. Analogno, kako je $M_0 \subseteq IntM_1 \subseteq M_1$, to je $IntM = Int(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}_0} M_i) \supseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}_0} IntM_i \supseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}_0} M_{i+1} = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}_0} M_i = M$.

Skupovi K i M su disjunktni. Naime, kada bi postojao $x \in K \cap M$, onda bi postojali $i, j \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $x \in K_i \cap M_j$. Kako je $M_j \subseteq M_{\max\{i,j\}}$ i $K_i \subseteq K_{\max\{i,j\}}$, to bi vrijedilo $x \in K_i \cap M_j \subseteq K_{\max\{i,j\}} \cap M_{\max\{i,j\}} = \emptyset$.

Neka je $L_i := X \setminus (K_i \cup M_i) = G_i \cap H_i$, za svaki $i \in \mathbb{N}$ i $L := X \setminus (K \cup M) = X \setminus ((\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}_0} K_i) \cup (\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}_0} M_i)) = X \setminus (\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}_0} (K_i \cup M_i)) = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}_0} (X \setminus (K_i \cup M_i)) = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}_0} L_i$.

Familija $\mathcal{W}_i := (U_\lambda^i \cap L : \lambda \in \Lambda_i, ClU_\lambda^i \cap M_{i-1} \neq \emptyset)$ je otvoreni pokrivač prostora L, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Nadalje, vrijedi $ord\mathcal{W}_i \leq n - 1$. Naime, neka su $U_{\lambda_1}^i \cap L, \ldots, U_{\lambda_{n+1}}^i \cap L$, međusobno različiti, takvi da vrijedi $ClU_{\lambda_j}^i \cap M_{i-1} \neq \emptyset$. Pretpostavimo da postoji $x \in U_{\lambda_1}^i \cap L \cap \cdots \cap U_{\lambda_{n+1}}^i \cap L$. Tada je $x \in L \subseteq$

$L_i \subseteq G_i$, pa postoji $\lambda \in \Lambda_i$ takav da je $x \in U^i_\lambda$ i $ClU^i_\lambda \cap M_{i-1} = \emptyset$. Kako je $ord\mathcal{U}_i \leq n$, to postoji $j \in \{1, \ldots, n+1\}$, takav da je $U^i_\lambda = U^i_{\lambda_j}$. Dakle, $ClU^i_\lambda \cap M_{i-1} = ClU^i_{\lambda_j} \cap M_{i-1} \neq \emptyset$, što je u kontradikciji s $ClU^i_\lambda \cap M_{i-1} = \emptyset$. Zaključujemo da je $ord\mathcal{W}_i \leq n-1$.

Dokažimo da $\mathcal{W}_{i+1}$ profinjuje $\mathcal{W}_i$, za svaki $i \in \mathbb{N}_0$. Neka je $i \in \mathbb{N}_0$ proizvoljan. Neka je $U^{i+1}_\lambda \cap L$ proizvoljan član pokrivača $\mathcal{W}_{i+1}$. Tada postoji član U^i_μ pokrivača $\mathcal{U}_i$, takav da je $ClU^{i+1}_\lambda \subseteq U^i_\mu$. Kako je $ClU^{i+1}_\lambda \cap M_i \neq \emptyset$, to vrijedi $U^i_\mu \cap M_i \neq \emptyset$. Odavde slijedi $U^i_\mu \nsubseteq G_i$, pa je $U^i_\mu \subseteq H_i$. Odavde slijedi $ClU^i \cap M_{i-1} \neq \emptyset$, odnosno $U^i_\mu \cap L$ je član pokrivača $\mathcal{W}_i$. Očito vrijedi $U^{i+1}_\lambda \cap L \subseteq U^i_\mu \cap L$. Dakle, $\mathcal{W}_{i+1}$ je profinjenje od $\mathcal{W}_i$, za svaki $i \in \mathbb{N}_0$. Iz Propozicije 4.26 slijedi $dimL \leq n-1$. Po pretpostavci indukcije, vrijedi $IndL \leq dimL \leq n-1$. Iz Teorema 2.6 slijedi $IndX \leq n = dimX$. Time je dokazano da vrijedi $IndX = dimX$. ■

Poglavlje 5

Osnovni teorem teorije dimenzije

U ovom poglavlju ćemo dokazati da je dimenzija euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ jednaka n, bilo da se radi o velikoj ili maloj induktivnoj dimenziji, ili dimenziji pokrivanja.

Teorem 5.1 *Neka je X separabilan metrizabilan prostor i $n \in \mathbb{N}_0$.*
Vrijedi $indX \leq n$ ako i samo ako, za svaki konačan niz $((A_i, B_i))_{i \in \{1,\ldots,n+1\}}$, $n+1$ parova disjunktnih zatvorenih podskupova od X , postoje zatvoreni skupovi $L_1, \ldots, L_{n+1} \subseteq X$, tako da L_i separira skupove A_i i B_i, za svaki $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, te vrijedi $\bigcap_{i=1}^{n+1} L_i = \emptyset$.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $indX \leq n$ i neka je $((A_i, B_i))_{i \in \{1,\ldots,n+1\}}$ konačan niz $n+1$ parova disjunktnih zatvorenih podskupova od X. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, definirat ćemo separator L_i skupova A_i i B_i, tako da vrijedi $ind(L_1 \cap \cdots \cap L_i) \leq n - i$. Neka je $i = 1$. Po Prvom Teoremu separacije, postoji separator L_1 između A_1 i B_1 takav da je $indL_1 \leq n - 1$. Pretpostavimo da smo definirali separator L_k između A_k i B_k, takav da vrijedi

$ind(L_1 \cap \cdots \cap L_k) \leq n - k$, za svaki $k \in \mathbb{N}, k < i > 1$. Kako za separabilan potprostor $L_1 \cap \cdots \cap L_{i-1}$ prostora X vrijedi $ind(L_1 \cap \cdots \cap L_{i-1}) \leq n-(i-1)$, to, po Drugom teoremu separacije, postoji separator L_i između A_i i B_i, takav da vrijedi $ind((L_1 \cap \cdots \cap L_{i-1}) \cap L_i) \leq n-(i-1)-1 = n-i$. Za $i = n+1$, vrijedi $ind(\bigcap\limits_{j=1}^{n+1} L_j) \leq n-(n+1) = -1$. Odavde slijedi da je $\bigcap\limits_{j=1}^{n+1} L_j = \emptyset$.

Obratno, pretpostavimo da za svaki konačan niz $((A_i, B_i))_{i\in\{1,\ldots,n+1\}}$, $n+1$ parova disjunktnih zatvorenih podskupova od X , postoje zatvoreni skupovi $L_1, \ldots, L_{n+1} \subseteq X$, tako da L_i separira skupove A_i i B_i, za svaki $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, te vrijedi $\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} L_i = \emptyset$. Tvrdimo da je $indX \leq n$. Dokazat ćemo da je $dimX \leq n$, pa će , iz Teorema o jednakosti dimenzija, slijediti $indX \leq n$.

Neka je $(U_i, i \in \{1, \ldots, n+2\}$ otvoren pokrivač prostora X s $n+2$ međusobno različitih članova. Po Teoremu 3.10, $(U_i, i \in \{1, \ldots, n+2\}$ ima zatvoreno umanjenje $(B_i, i \in \{1, \ldots, n+2\}$. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, neka je $A_i := X \setminus U_i$. Konačan niz $((A_i, B_i))_{i\in\{1,\ldots,n+1\}}$, se sastoji od $n+1$ parova disjunktnih zatvorenih podskupova od X. Po pretpostavci teorema postoje zatvoreni skupovi $L_1, \ldots, L_{n+1} \subseteq X$, tako da L_i separira skupove A_i i B_i, za svaki $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, te vrijedi $\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} L_i = \emptyset$. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, neka su $V_i, W_i \subseteq X$ otvoreni podskupovi od X, takvi da vrijedi

$$A_i \subseteq V_i,\ B_i \subseteq W_i,\ V_i \cap W_i = \emptyset \text{ i } X \setminus L_i = V_i \cup W_i.$$

Primjetimo da vrijedi

$$(\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n+1} W_i) = \bigcup_{i=1}^{n+1} (V_i \cup W_i) = \bigcup_{i=1}^{n+1} X \setminus L_i = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n+1} L_i = X.$$

Definirajmo

$$W_{n+2} := U_{n+2} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i \right).$$

Tvrdimo da je $(W_i, i \in \{1,\dots,n+2\}$ otvoreno umanjenje pokrivača $(U_i, i \in \{1,\dots,n+2\})$. Kako je $B_{n+2} \subseteq U_{n+2}$ i $B_i \subseteq W_i$, za svaki $i \in \{1,\dots,n+1\}$, to vrijedi
$\bigcup\limits_{i=1}^{n+2} W_i = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} W_i\right) \cup \left[U_{n+2} \cap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} V_i\right)\right] = \left[\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} W_i\right) \cup U_{n+2}\right] \cap \left[\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} W_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} V_i\right)\right] \supseteq \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n+2} B_i\right) \cap X = X.$
Dakle, $(W_i, i \in \{1,\dots,n+2\})$ je pokrivač prostora X. Nadalje, W_i je otvoren skup u X, za svaki $i \in \{1,\dots,n+2\}$. Za svaki $i \in \{1,\dots,n+1\}$, vrijedi $W_i \subseteq X \setminus V_i \subseteq X \setminus A_i = X \setminus (X \setminus U_i) = U_i$. Očito je $W_{n+2} \subseteq U_{n+2}$. Dakle, $(W_i, i \in \{1,\dots,n+2\}$ je otvoreno umanjenje pokrivača $(U_i, i \in \{1,\dots,n+2\})$. Nadalje, vrijedi
$\bigcap\limits_{i=1}^{n+2} W_i = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} W_i\right) \cap \left[U_{n+2} \cap \left(\bigcup\limits_{j=1}^{n+1} V_j\right)\right] \subseteq \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} W_i\right) \cap \left(\bigcup\limits_{j=1}^{n+1} V_j\right) = \bigcup\limits_{j=1}^{n+1} \left[\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} W_i\right) \cap V_j\right] = \bigcup\limits_{j=1}^{n+1} \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} W_i \cap V_j\right) \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n+1} (W_j \cap V_j) = \emptyset$. Dakle, $ord(W_i, i \in \{1,\dots,n+2\}) \leq n$. Iz Teorema 3.17 slijedi $dimX \leq n$. Iz Teorema o jednakosti dimenzija slijedi $indX = dimX \leq n$. ■

Da bismo dokazali Osnovni teorem teorije dimenzije, koristit ćemo Brouwerov teorem o fiksnoj točki. Prisjetimo se:

Teorem 5.2 (Brouwerov teorem o fiksnoj točki) *Svaka neprekidna funkcija $f : I^n \to I^n$, gdje je $n-$kocka I^n potprostor euklidksog prostora $\mathbb{R}^n$, ima fiksnu točku.*

Teorem 5.3 *Za svaki $i \in \{1,\dots,n\}$, neka je L_i separator podskupova A_i i B_i $n-$kocke I^n definiranih s*

$$A_i = \{(x_1,\dots,x_n) \in I^n : x_i = 0\} \text{ i } B_i = \{(x_1,\dots,x_n) \in I^n : x_i = 1\}.$$

Tada je $\bigcap\limits_{i=1}^{n} L_i \neq \emptyset$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $\bigcap\limits_{i=1}^{n} L_i = \emptyset$. Po Lemi 3.11, postoji otvoreno uvećanje $(H_i, i \in \{1,\dots,n\})$ familije $(L_i, i \in \{1,\dots,n\})$.

Kako je $\bigcap\limits_{i=1}^{n} L_i = \emptyset$, to je $\bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i = \emptyset$. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$, neka je $G_i := H_i \setminus (A_i \cup B_i)$. Vrijedi $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i = \emptyset$. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$, neka su $U_i, V_i \subseteq I^n$ otvoreni podskupovi od I^n, takvi da vrijedi

$$A_i \subseteq U_i,\ B_i \subseteq V_i,\ U_i \cap V_i = \emptyset \text{ i } I^n \setminus L_i = U_i \cup V_i.$$

Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$, definirajmo

$$E_i := U_i \setminus G_i \text{ i } F_i := W_i \setminus G_i.$$

Kako je $L_i \subseteq H_i$ i $L_i \cap (A_i \cup B_i) = \emptyset$, to je $L_i \subseteq G_i$, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Odavde slijedi da je $E_i = (U_i \cup L_i) \setminus G_i$ i $E_i = (V_i \cup L_i) \setminus G_i$. Kako je $I^n \setminus U_i = L_i \cup V_i$ i $I^n \setminus V_i = L_i \cup U_i$, to su E_i i F_i zatvoreni podskupovi od I^n. Nadalje, $E_i \cap F_i = (U_i \setminus G_i) \cap (V_i \setminus G_i) = (U_i \cap V_i) \setminus G_i = \emptyset$. Također vrijedi $E_i, F_i \neq \emptyset$. Naime, u protivnom bi vrijedilo $U_i = G_i$ ili $V_i = G_i$, a odatle bi slijedilo da je skup U_i ili skup V_i otvoreno-zatvoren. Kako je $U_i, V_i \neq \emptyset, I^n$, to bi bilo u kontradikciji s činjenicom da je I^n povezan prostor. Dakle, E_i i F_i su disjunktni zatvoreni neprazni podskupovi od I^n, pa, po Urysohnovom teoremu, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ postoji neprekidna funkcija $f_i : I^n \to I$, takva da vrijedi

$$f_i(E_i) \subseteq \{1\} \text{ i } f_i(F_i) \subseteq \{0\}.$$

Nadalje, vrijedi $I^n \setminus G_i = E_i \cup F_i$, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$ proizvoljan. Kako je $E_i \cup F_i = (U_i \cup V_i) \setminus G_i$, to je dovoljno dokazati da ,za svaki $x \in I^n$ takav da je $x \notin (U_i \cup V_i)$, vrijedi $x \in G_i$. Pa, neka je $x \in I^n \setminus (U_i \cup V_i)$. Tada je $x \in I^n \setminus (U_i \cup V_i) = L_i \subseteq H_i$ i $x \notin U_i \cup V_i \supseteq A_i \cup B_i$. Po definiciji od G_i, slijedi $x \in G_i$.

Definirajmo funkciju $f : I^n \to I^n$ s $f(x) := (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Funkcije f je neprekidna. Neka je $x \in I^n$ proizvoljna točka. Vrijedi $I^n = I^n \setminus \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i \right) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} I^n \setminus G_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (E_i \cup F_i)$. Dakle, postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$, takav da je $x \in E_i \cup F_i$. Iz $f_i(E_i) \subseteq \{1\}$ i $f_i(F_i) \subseteq \{0\}$, slijedi: ako je $x \in E_i$, onda je $f_i(x) = 1$, a ako je $x \in F_i$, onda je $f_i(x) = 0$. Dakle, ako je $x \in E_i$, onda je $f(x) \in B_i \subseteq F_i$, a ako je $x \in F_i$, onda je $f(x) \in A_i \subseteq E_i$. Kako je $E_i \cap F_i = \emptyset$, to je $x \neq f(x)$, za svaki $x \in I^n$, što je u kontradikciji s Brouwerovim teoremom o fiksnoj točki. Dakle, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} L_i \neq \emptyset$. ■

Teorem 5.4 *Za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi*

$$indI^n = IndI^n = dimI^n = n,$$

gdje je I^n $n-$kocka.

Dokaz. U Primjeru 1.7 smo dokazali da je $ind\mathbb{R}^n \leq n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Po Teoremu o potprostoru za malu induktivnu dimenziju, vrijedi $indI^n \leq ind\mathbb{R}^n \leq n$. Po Teoremu o jednakosti dimenzija, dovoljno je dokazati da je $indI^n \geq n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo suprotno, tj neka je $indI^n \leq n-1$. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$, definirajmo

$$A_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in I^n : x_i = 0\} \text{ i } B_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in I^n : x_i = 1\}.$$

Po Teoremu 5.1, za konačan niz $((A_i, B_i))_{i \in \{1,\ldots,n\}}$, n parova disjunktnih zatvorenih podskupova od I^n , postoje zatvoreni skupovi $L_1, \ldots, L_n \subseteq I^n$, tako da L_i separira skupove A_i i B_i, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$, te vrijedi $\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} L_i = \emptyset$. No, po prethodnom teoremu, je $\bigcap\limits_{i=1}^{n} L_i \neq \emptyset$. Dakle, $indI^n \nleq n - 1$, pa je $indI^n = n$. ■

Teorem 5.5 (Osnovni teorem teorije dimenzije) *Za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi*

$$ind\mathbb{R}^n = Ind\mathbb{R}^n = dim\mathbb{R}^n = n,$$

gdje je $\mathbb{R}^n$ euklidski prostor.

Dokaz. U Primjeru 1.7 dokazali smo da je $ind\mathbb{R}^n \leq n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kako je $indI^n = n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, to je , po Teoremu o potprostoru za malu induktivnu dimenziju, $ind\mathbb{R} \geq indI^n = n$. Dakle, $ind\mathbb{R} = n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Po Teoremu o jednakosti dimenzija slijedi,

$$ind\mathbb{R}^n = Ind\mathbb{R}^n = dim\mathbb{R}^n = n,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. ■

Korolar 5.6 *Za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi*

$$indS^n = IndS^n = dimS^n = n,$$

gdje je S^n jedinična sfera u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dokaz. Za proizvoljnu točku $x \in S^n$, potprostor $S^n \setminus \{x\}$ od S^n je homeomorfan euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$. Po Teoremu 1.4, je $ind(S^n \setminus \{x\}) = n$, pa je, po Teoremu o potprostoru za malu induktivnu dimenziju, $indS^n \geq n$. U Primjeru 1.7 smo dokazali da je $indS^n \leq n$, pa zaključujemo da je $indS^n = n$.

■

Literatura

[1] R. Engelking, General Topology, Heldermann, Berlin, 1989.

[2] R. Engelking, Theory of Dimensions, Finite and Infinite, Heldermann, Berlin, 1995.

[3] S. Mardešić, Što je dimenzija prostora, Matematika (1990), No. 3, str. 5-12.

[4] J. R. Munkres, Topology, Pearson Education International, Prentice Hall, 2000.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

O DIMENZIJI TOPOLOŠKOG PROSTORA

Luca Olivari

Sažetak:

U ovom radu definiramo tri dimenzije topološkog prostora, malu induktivnu dimenziju, veliku induktivnu dimenziju i dimenziju pokrivanja, te dokazujemo neke važne teoreme o tim dimenzijama. Posebno, dokazujemo da se u klasi seprabilnih metrizabilnih prostora podudaraju sve tri dimenzije, te da se u klasi metrizabilnih prostora podudaraju velika induktivna dimenzija i dimenzija pokrivanja. Naposljetku, dokazujemo da je dimenzija euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ *jednaka* n*, bilo da se radi o maloj induktivnoj dimenziji, velikoj induktivnoj dimenziji, ili dimenziji pokrivanja.*

Ključne riječi:

Topološki prostor, Mala induktivna dimenzija, Velika induktivna dimenzia, Dimenzija pokrivanja, Dimenzija topološkog prostora

Podatci o radu:

vii+105=112 stranica

Mentor(ica): *prof. dr. sc. Vlasta Matijević*

Članovi povjerenstva:

izv.prof.dr.sc. Nikola Koceić Bilan

dr.sc. Goran Erceg

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *03.07.2017.*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

ON DIMENSION OF TOPOLOGICAL SPACE

Luca Olivari

Abstract:

In this thesis we define three different dimensions of a topological space, small inductive dimension, large inductive dimension and covering dimension, and we prove some important theorems about these dimensions. In particular, we prove that the three dimensions coincide in the class of all separable metrizable spaces, while the large inductive dimension and the covering dimension coincide in the class of all metrizable spaces. Finally, we prove that the dimension of the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ *is equal to* n*, whether it is the small inductive dimension, the large inductive dimension, or the covering dimension.*

Key words:

Topological space, Small inductive dimension, Large inductive dimension, Covering dimension, Dimension of topological space

Specifications:

vii+105=112 pages

Mentor: *professor Vlasta Matijević*

Committee:

associate professor Nikola Koceić Bilan

postdoc Goran Erceg

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

This thesis was approved by a Thesis commettee on *03.07.2017.*