

# Numeričko adaptivno modeliranje advektivno dominantnih problema koristeći modificirane hijerarhijske Fup bazne funkcije

---

**Kamber, Grgo; Gotovac, Hrvoje; Kozulić, Vedrana; Malenica, Luka; Gotovac, Blaž**

*Source / Izvornik:* **Common Foundations 2018 - uniSTem: 6th Congress of Young Researchers in the Field of Civil Engineering and Related Sciences, 2018, 100 - 106**

**Conference paper / Rad u zborniku**

*Publication status / Verzija rada:* **Published version / Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

<https://doi.org/10.31534/CO/ZT.2018.14>

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:123:168839>

*Rights / Prava:* [Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International/Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-10**



*Repository / Repozitorij:*

[FCEAG Repository - Repository of the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy, University of Split](#)



## Numeričko adaptivno modeliranje advektivno dominantnih problema koristeći modificirane hijerarhijske Fup bazne funkcije

Grgo Kamber<sup>1</sup>, Hrvoje Gotovac<sup>1</sup>, Vedrana Kozulić<sup>1</sup>, Luka Malenica<sup>1</sup>, Blaž Gotovac<sup>1</sup>

(1) Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Republika Hrvatska, [grgo.kamber@gradst.hr](mailto:grgo.kamber@gradst.hr)

### Sažetak

U ovom radu razvijena je nova adaptivna numerička tehnika bazirana na metodi kontrolnih volumena i modificiranim hijerarhijskim Fup baznim funkcijama. Takve bazne funkcije spadaju u atomske bazne funkcije, zadovoljavaju razvoj jedinice ("partition of unity") i imaju mogućnost lokalnog poboljšavanja rješenja u obliku h-p adaptacije. Adaptivna analiza biti će provedena na nestacionarnoj advekcijsko-disperzijskoj jednadžbi. Efikasnost nove adaptivne tehnike pokazat će se usporedbom numeričkog rješenja dobivenog korištenjem jednolikog rasporeda Fup baznih funkcija te onog dobivenog korištenjem adaptivne tehnike i modificiranih hijerarhijskih Fup baznih funkcija.

*Ključne riječi: h-p adaptacija, hijerarhijske Fup bazne funkcije, advektivno-disperzijska jednadžba, metoda kontrolnih volumena*

## Numerical adaptive modelling of the advective dominant problems using modified hierarchical Fup basis functions

### Abstract

In this paper, a new adaptive numerical technique was developed based on the control volume method and the modified hierarchical Fup basis functions. Such basic functions belong to the class of atomic basis functions, satisfy partition of unity and have the ability to locally improve solutions in the form of h-p adaptation. An adaptive analysis will be performed on the non-stationary advection-dispersion equation. The efficiency of the proposed adaptive technique will be presented by comparison of the numerical solution obtained by using a uniform distribution of Fup basis functions, and the one obtained by using adaptive technique and modified hierarchical Fup basis functions.

*Keywords: h-p adaptation, hierarchical Fup basis functions, advection-dispersion equation, finite volume method*

## 1. Uvod

Kod rješavanja inženjerskih problema kao što su pronos topline i/ili zagađenja, širenje pukotina ili turbulencija teži se korištenju numeričkih alata koji će ubrzati i pojeftiniti proces. Jedna od ideja je korištenje adaptivnog procesa koji koristi finiju mrežu samo tamo gdje su promjene rješenja zahtjevnije.

Zbog potrebe za lokalnim poboljšanjem baze, došlo je do razvoja određenog broja alata kao što su T-splineovi [1], hijerarhijski B-splineovi [2] i modificirani hijerarhijski B-splineovi [3]. Takva ideja modificiranja baze je implementirana u ovom radu koristeći Fup bazne funkcije [4],[5], koje imaju mogućnost lokalnog poboljšanja i to u obliku h-p adaptacije (podizujući rezolucijski nivo podiže se i red bazne funkcije).

Cilj ovog rada je pokazati na 1D advekcijsko-disperzijskoj jednadžbi prednosti adaptivnog postupka u odnosu na jednoliki raspored baznih funkcija.

## 2. Advekcijsko-disperzivna jednadžba

Diskretizacija parcijalne diferencijalne jednadžbe (PDJ) biti će predstavljena na 1D advekcijsko-disperzijskoj jednadžbi (ADJ) u obliku:

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2} - V \frac{\partial c(x, t)}{\partial x}, x \times t \in (a, b) \times (0, \infty) \quad (1)$$

s početnim uvjetima:

$$c(x, 0) = C_0(x) \quad (2)$$

i rubnim uvjetima:

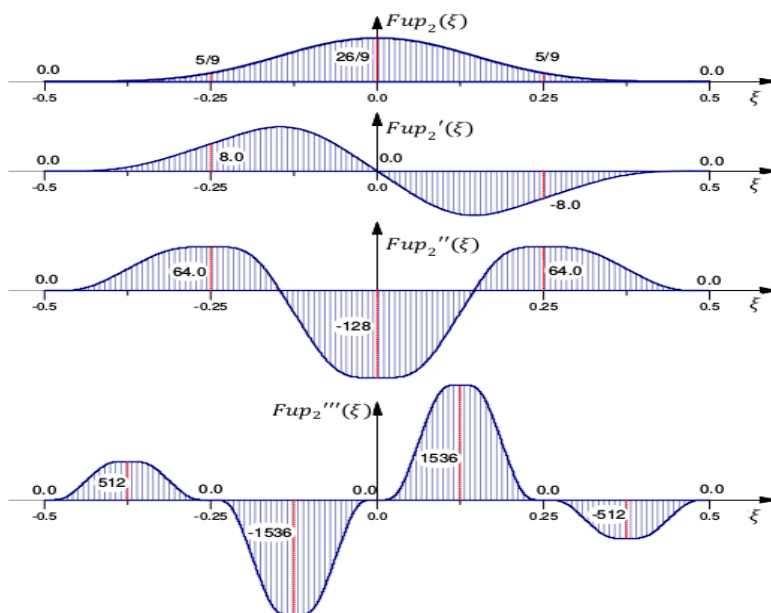
$$c(a, t) = G(t), \frac{\partial c(b, t)}{\partial x} = H(t) \quad (3)$$

gdje  $c$  (koncentracija u pronosu mase) predstavlja rješenje početno-rubnog problema (1)-(3), a  $D$  [ $\text{m}^2/\text{s}$ ] i  $V$  [ $\text{m}/\text{s}$ ] su koeficijenti disperzije i brzine koji u općenitom slučaju mogu biti funkcije prostora, vremena i/ili nepoznatog rješenja.

## 3. Metodologija

### 3.1. Bazne funkcije

Fup funkcije pripadaju klasi atomskih baznih funkcija i jako su bliske više poznatim B-spline funkcijama. Za razliku od B-spline funkcija, funkcije  $Fup_n(\xi)$  su finite funkcije iz klase  $C^\infty$ , gdje  $n$  označava najviši stupanj polinoma koji se može točno prikazati u obliku linearne kombinacije baznih funkcija dobivenih pomicanjem funkcije  $Fup_n(\xi)$  za karakteristični odsječak veličine  $\Delta\xi=2^{-n}$  [4],[5]. Derivacije  $Fup_n(\xi)$  baznih funkcija su kontinuirane i glatke funkcije, što se vidi na slici 1., gdje je prikazana Funkcija  $Fup_2(\xi)$  i njene prve tri derivacije [4].



Slika 1. Fup<sub>2</sub> i njene prve tri derivacije

### 3.2. Hijerarhijske modificirane Fup bazne funkcije

Hijerarhijske Fup bazne funkcije imaju mogućnost lokalnog poboljšanja rješenja, na način da se može mijenjati jedna ili više baznih funkcija s ciljem bolje i efikasnije aproksimacije rješenja. U istraživanju u Wei i koautora izložena je procedura hijerarhijskih B-spline baznih funkcija koristeći B<sub>3</sub>-spline bazne funkcije [3]. Slična ideja je implementirana u ovom radu koristeći Fup<sub>n</sub> bazne funkcije koje također imaju mogućnost razvoja hijerarhijskih baznih funkcija. Prvo se na rezolucijskom nivou "0" postavi skup jednoliko raspoređenih baznih funkcija (uniformni grid). Zatim se prema [3,4] ta baza može proširiti, zamjenjujući svaku odabranu Fup baznu funkciju s više baznih funkcija na prvom rezolucijskom nivou. Takva zamjena ukazuje na lokalno poboljšanje baze nivou "0" koja koristi jednoliki raspored baznih funkcija istog reda. Poboljšanje će se vršiti rekurzivno, sve do maksimalnog rezolucijskog nivoua ili dok se ne zadovolji početna zadana točnost adaptivnog procesa ( $\epsilon_{\text{adap}}$ ). U nastavku će biti objašnjena konstrukcija dva uzastopna nivoua. Razlika primjene B-spline i Fup baznih funkcija u proceduri hijerarhijskih baznih funkcija iz [3] je u procesu konstruiranja višeg rezolucijskog nivoua "l+1".

Za B-splineove vrijedi:

$$B_{i,p}^l(\xi) = \sum_{k=0}^{p+1} c_{i,k}^p \cdot B_{2i+k,p}^{l+1}(\xi); \quad c_{i,k}^p = \frac{1}{2^p} \binom{p+1}{k}, \quad i = 0, 1, \dots, n^l - 1 \quad (4)$$

Iz čega je vidljivo da se jedna B<sub>n</sub>-spline funkcija s nivoua "l" zamjenjuje s n+2 B<sub>n</sub>-spline baznih funkcija na nivou "l+1".

Kod  $Fup_n$  baznih funkcija u procesu konstruiranja rezolucijskog nivoa " $l+1$ " jedan  $Fup_n$  zamjenjuje s  $n+2$   $Fup_{n+1}$  baznih funkcija (slika 2) prema izrazu:

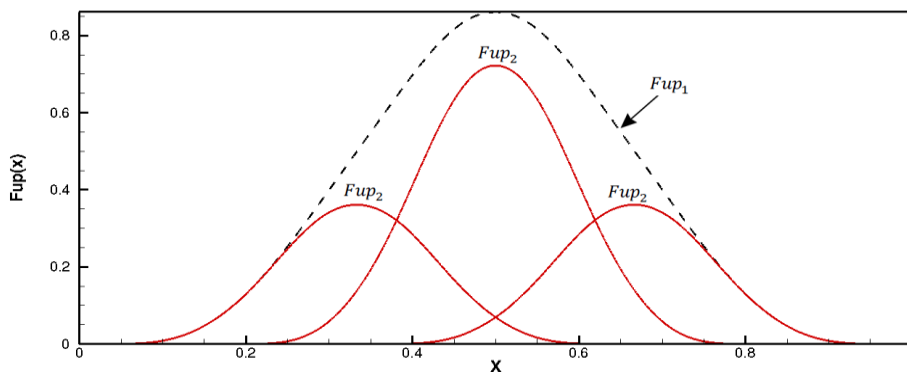
$$Fup_n^l(\xi) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{n+1}^k \cdot Fup_{n+1}^{l+1}\left(\xi - \frac{k}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}}\right); \quad c_{n+1}^k = \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{k} \quad (5)$$

Dakle, koristeći *Fup* bazne funkcije dobiva se baza koja na svakom rezolucijskom nivou povećava red *Fupa*.

Kako bi se ostvarilo bitno svojstvo  $\sum Fup_n^l(\xi) = 1$ , *Fup* bazne funkcije se modificiraju na način:

$$Fup_n^{l*}(\xi) = \frac{1}{2^n} Fup_n^l(\xi); \quad Fup_{n+1}^{l+1*}(\xi) = \frac{1}{2^n} Fup_{n+1}^{l+1}(\xi) \quad (6)$$

te se nadalje radi s modificiranom *Fup* bazom koja ispunjava svojstvo razvoja jedinice.



**Slika 2.** Funkcija  $Fup_1$  u obliku linearne kombinacije  $Fup_2$  baznih funkcija

### 3.3. Adaptivna strategija

Nepoznato rješenje se izražava pomoću linearne kombinacije nepoznatih koeficijenata i baznih funkcija:

$$c(x, t) = \sum_j \alpha_j(t) \cdot \varphi_j(x) \quad (7)$$

gdje  $\alpha_j(t)$  predstavlja koeficijente baznih funkcija, a  $\varphi_j(x)$  *Fup* bazne funkcije.

Primjenom formulacije kontrolnih volumena [6] na ADJ (1) dobiva se:

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \alpha_j(t)}{\partial t} dt \int_{\Omega_i} \varphi_j(x) dx = \int_t^{t+\Delta t} \alpha_j(t) dt \left[ \int_{\Omega_i} D \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \int_{\Omega_i} V \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx \right] \quad (8)$$

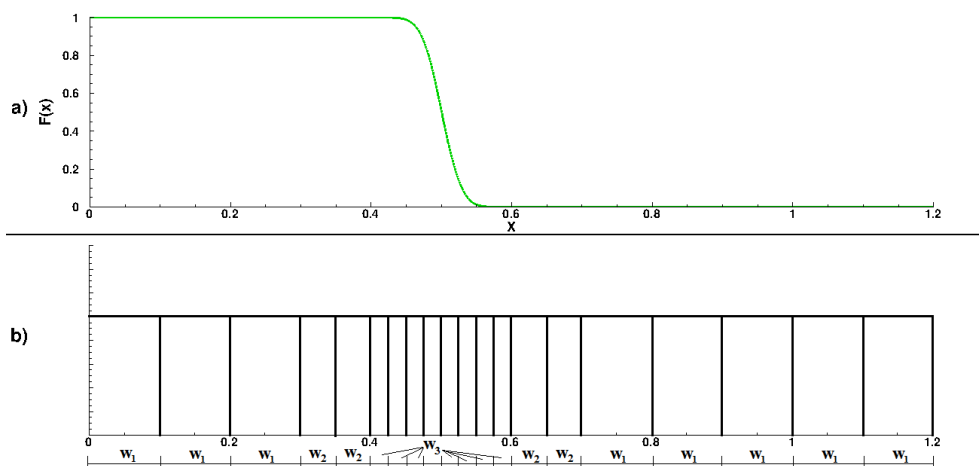
Kada se postavje jednadžbe za sve unutrašnje kontrolne volumene s potrebnim rubnim jednadžbama, dovodi se do konačnog skupa algebarskih jednadžbi u obliku:

$$Au = b \quad (9)$$

gdje je  $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}$  matrica sustava,  $\mathbf{u}=\{u_i^{t+\Delta t}\}$  vektor nepoznanica *Fup* koeficijenata, a  $\mathbf{b}=\{b_i\}$  vektor "desne strane".

Prvo se numeričko rješenje dobije temeljem jednolikog rasporeda kontrolnih volumena (0-ti nivo), nakon čega se računa pogreška na kontrolnom volumenu upola manje širine. Zatim

se za sve one kontrolne volumene koji nisu zadovoljili parametar adaptacije uvodi novi rezolucijski nivo. Postupak se ponavlja sve dok kriterij adaptacije nije zadovoljen na svakom kontrolnom volumenu ili se postigne najveći mogući rezolucijski nivo. Za očekivati je da će finiji raspored kontrolnih volumena biti u dijelu domene gdje je promjena rješenja zahtjevnija (slika 3). Dobiveni raspored predstavlja odgovarajuću računalnu mrežu potrebnu za definiranje prostorne diskretizacije PDJ za trenutni vremenski trenutak. Takav raspored vrijedi za jedan globalni vremenski korak što znači da se nakon svakog globalnog vremenskog koraka mora odrediti novi raspored baznih funkcija i kontrolnih volumena. Unutar svakog globalnog vremenskog koraka postoje lokalni vremenski koraci, koji predstavljaju vremenski korak diskretizacije PDJ. Adaptivna procedura dinamički prati promjene rješenja tako da u svakom globalnom vremenskom koraku generira gušći raspored kontrolnih volumena upravo tamo gdje su najveći gradijenti i promjene rješenja.



**Slika 3.** Primjer oštrog fronta (a) i shematski prikaz adaptivnog rasporeda kontrolnih volumena (b)

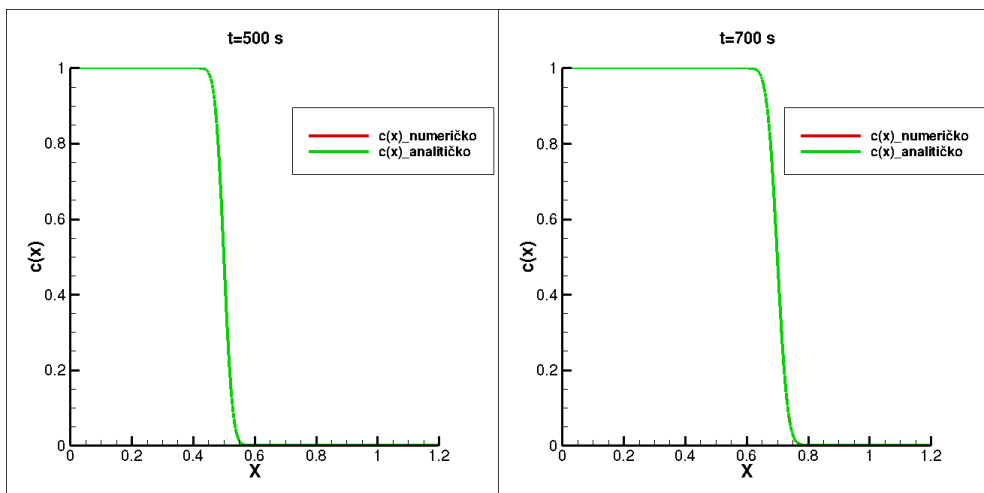
## 4. Rezultati

Zadana je 1D ADJ s konstantnim koeficijentima disperzije ( $D=10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ ) i brzine ( $V=10^{-7} \text{ m/s}$ ), parametrom adaptacije  $\varepsilon_{\text{adapt}}=5 \cdot 10^{-4}$ , te početnim i rubnim uvjetima:

$$c(x, 0) = C_0(x) \tag{10}$$

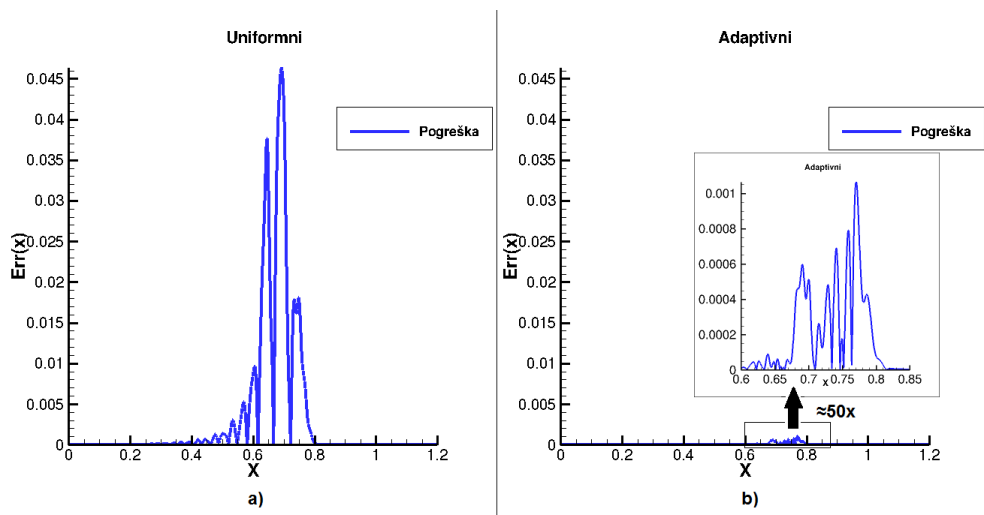
$$c(0, t) = 1; \frac{\partial c(L, t)}{\partial x} = 0 \tag{11}$$

U ovom radu se prikazuje rješenje (slika 4.) dobiveno adaptivnom tehnikom za početni trenutak  $t=500 \text{ s}$  i rješenje dobiveno nakon  $200 \text{ s}$  ( $t=700 \text{ s}$ ) unutar 4 globalna koraka (4 adaptivne mreže) u kojem je bilo 10 000 lokalnih koraka ( $\Delta t_{\text{LOK}}=0.005 \text{ s}$ ).



Slika 4. Rješenje adaptivnom tehnikom u trenutku t=500s (a) i t=700s (b)

Početni raspored je definiran kao 66 jednoliko raspoređenih  $Fup_1$  baznih funkcija, dok adaptivna baza sadrži 82 bazne funkcije (3 rezolucijska nivoa,  $Fup_1+Fup_2+Fup_3$ ) dobivene integralnim zadovoljenjem adaptivnog kriterija ( $\epsilon_{\text{adapt}}=5 \cdot 10^{-4}$ ) na svim kontrolnim volumenima. Apsolutna pogreška je dana uspoređujući jednoliki i adaptivni raspored baznih funkcija (slika 5.), gdje se vidi prednost korištenja h-p adaptacije u odnosu na jednoliki raspored baznih funkcija kod rješavanja problema koji imaju veliki diskontinuitet. Odstupanje numeričkog rješenja od analitičkog može se kontrolirati mijenjajući kriterij adaptacije.



Slika 5. Greška aproksimacije uniformnog (a) i adaptivnog rješenja (b) za t=700s

## 5. Zaključak

U radu je korištena tehnika hijerarhijskih adaptivnih *Fup* baznih funkcija koje podižući rezolucijski nivo povećavaju i red bazne funkcije. Takva h-p tehnika adaptacije nije moguća s klasičnim spline baznim funkcijama. Adaptivna procedura primijenjena je na rješavanju 1D ADJ gdje je advekcijski član dominantan. Zbog početnog uvjeta, koji stvara oštri gradijent, i dominantne advekcije koji takav problem provodi kroz domenu, dolazi se do potrebe za poboljšanjem baze koja će moći točnije i efikasnije opisati problem u svakom trenutku. Pokazana tehnika pokazala je poboljšanje u numeričkoj aproksimaciji problema u odnosu na uniformni raspored baznih funkcija, što se najbolje očituje kroz prikaz pogreške uniformnog i adaptivnog rješenja u zadnjem globalnom trenutku.

## Zahvala

Zahvaljujemo što je ovo istraživanje financirala Hrvatska zaklada za znanost kroz znanstveni projekt "Modeliranje tečenja u krškim vodonosnicima"; UIP-2013-11-8103.

## Literatura

- [1] Sederberg, T.W., Cardon, D.L., Finnigan, G.T., North, N.S., Zheng, J., Lyche, T.: T-spline simplification and local refinement, *ACM Transactions on Graphics*, 23(3):276-283, 2004., doi: 10.1145/1015706.1015715
- [2] Forsey, D.R., Bartels, R.H.: Hierarchical B-spline refinement, *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 22(4):205-212, 1988., doi: 10.1145/54852.378512
- [3] Wei, X., Zhang, Y., Hughes, T.J.R., Scott, M. A.: Truncated hierarchical Catmull-Clark subdivision with local refinement, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 291, pp.1-20, Jul. 2015., doi: 10.1016/j.cma.2015.03.019
- [4] Kurbaša, N. B.: Eksponecijalne atomske bazne funkcije: razvoj i primjena, Disertacija, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, geodezije i arhitekture, Split, 2016.
- [5] Gotovac, H.: Tečenje i pronos s promjenjivom gustoćom u vodonosnicima, Magistarski rad, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, geodezije i arhitekture, Split, 2005.
- [6] Patankar, S.V.: *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere Pub., 1980., doi: 10.1201/9781482234213