

# Procjena koeficijenta atenuacije morske vode korištenjem Lambertove W funkcije

---

Ćakić, Lovre

Master's thesis / Diplomski rad

2020

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split, University of Split, Faculty of science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:166:363479>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-14**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Science](#)



Sveučilište u Splitu

Prirodoslovno – matematički fakultet

Odjel za fiziku

Lovre Ćakić

Procjena koeficijenta atenuacije morske vode  
korištenjem Lambertove  $W$  funkcije

Diplomski rad

Split, rujan 2020.



Procjena koeficijenta atenuacije morske vode korištenjem Lambertove W funkcije

Lovre Ćakić

Sveučilišni diplomski studij Fizika okoliša

**Sažetak:**

Cilj rada je odrediti najbolju metodu procjene prosječnog vertikalnog koeficijenta atenuacije dolje usmjerene iradijance vodenog medija iz mjerenja podvodne i površinske dolje usmjerene iradijance. Analizirani podatci su prikupljeni u sklopu projekta *Hawaii Ocean Time-Series*, te su javno dostupni. U procjeni su upotrijebljene i uspoređene četiri metode. Metode su bazirane na metodi najmanjih kvadrata, jednadžbi prodiranja svjetlosti, rješenju jednadžbe prodiranja svjetlosti i Lambertovoj W funkciji, koja nikada prije nije upotrijebljena za rješavanje fizikalnog problema ove vrste. Metode su uspoređene na temelju vrijednosti koeficijenta determinacije između izmjerenih i procijenjenih vrijednosti. Najbolji rezultati su postignuti upotrebom metode bazirane na metodi najmanjih kvadrata, koja je ujedno i najoptimalnija po pitanju računalnih zahtjeva.

**Ključne riječi:** podvodno širenje svjetlosti, podvodna iradijanca, koeficijent atenuacije vode, Lambertova W funkcija

**Rad sadrži:** 55 stranica, 28 slike, 2 tablice, 10 literaturnih navoda. Izvornik je na hrvatskom

**Mentor:** dr. sc. Žarko Kovač, doc.

**Ocjenjivači:** dr. sc. Žarko Kovač, doc.

dr. sc. Darko Koračin, red. prof.

dr. sc. Jadranka Šepić, doc.

**Rad prihvaćen:** 01. 09. 2020.

Rad je pohranjen u knjižnici Prirodoslovno – matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu.

Estimating the attenuation coefficient of sea water with the Lambert W function

Lovre Ćakić

University undergraduate study programme Physics

**Abstract:**

The main goal of the thesis is to determine the best method for estimating average vertical attenuation coefficient of downward irradiance of water medium from the measurements of underwater and surface downward irradiance. Data used in the analysis were collected as a part of the Hawaii Ocean Time-Series project and are publicly available. Total of four different methods were implemented and compared. Methods are based on the least squares method, light penetration equation, the solution of the light penetration equation and the Lambert W function, which has never before been used for this kind of problem. Methods were compared on the basis of determination coefficient between measured and estimated values. The best result was achieved by the method based on the least squares method, which also had the least computational requirements.

**Keywords:** underwater light propagation, underwater irradiance, water attenuation coefficient, Lambert W function

**Thesis consists of:** 55 pages, 28 figures, 2 tables, 10 references. Original language: Croatian

**Supervisor:** Dr. Žarko Kovač, Asst. Prof.

**Reviewers:** Prof. Dr. Žarko Kovač, Asst. Prof.

Prof. Dr. Darko Koračin, Prof.

Prof. Dr. Jadranka Šepić, Asst. Prof.

**Thesis accepted:** 09 01, 2020.

Thesis is deposited in the library of the Faculty of Science, University of Split.

## IZJAVA

Ovaj rad, izrađen u Splitu, pod vodstvom mentora prof.dr.sc. Žarka Kovača, predan je na ocjenu Odjelu za Fiziku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Splitu radi stjecanja zvanja magistar fizike.

# Sadržaj

1	UVOD.....	1
2	TEORIJA.....	2
2.1	Definiranje optičkih parametara.....	2
2.2	Podvodna atenuacija svjetlosti.....	6
2.2.1	Apsorpcija i raspršenje.....	6
2.2.2	Koeficijenti apsorpcije, raspršenja i atenuacije toka svjetlosti.....	8
2.2.3	Vertikalni koeficijenti atenuacije iradijance.....	10
2.3	Lambertova W funkcija.....	12
3	METODOLOGIJA.....	15
3.1	Podatci korišteni u analizi.....	15
3.1.1	Hawaii Ocean Time-Series.....	15
3.1.2	Satlantic HyperPro.....	16
3.1.3	Problemi mjerenja podvodne iradijance.....	18
3.1.4	Odabir podataka.....	19
3.2	Procjena vertikalnog koeficijenta atenuacije dolje usmjerene iradijance.....	20
3.3	Testiranje metoda procjene profila.....	22
3.4	Dijagrami toka koda.....	23
4	REZULTATI I RASPRAVA.....	28
4.1	Analiza svih profila.....	28
4.2	Analiza pojedinačnog profila.....	45
5	ZAKLJUČAK.....	51
6	LITERATURA.....	53
	PRILOG.....	55

## **Popis kratica**

PAR - photosynthetically active radiation

IOP - inherent optical properties

AOP - apparent optical properties

HOT - Hawaii Ocean Time-Series

HOT-DOGS - Hawaii Ocean Time-series Data Organization & Graphical System

NSF - Nacional Science Foundation

Ed - downwelling irradiance

Lu - upwelling irradiance

Es - surface irradiance



# 1 UVOD

Koeficijent atenuacije je jedno od ključnih optičkih svojstava vodenog medija. Koeficijent atenuacije kojim je opisano gušenje iradijance s obzirom na dubinu se naziva vertikalni koeficijent atenuacije iradijance. Mogu se definirati različite vrste iradijance, a time i različite vrste vertikalnih koeficijenata atenuacije iradijance. Cilj ovog rada je odrediti najbolju metodu procjene vertikalnog koeficijenta atenuacije dolje usmjerene iradijance morske vode iz podvodnih i površinskih mjerenja dolje usmjerene iradijance, te odrediti najbolju metodu procjene funkcije dolje usmjerene iradijance o dubini s procijenjenom vrijednosti koeficijenta.

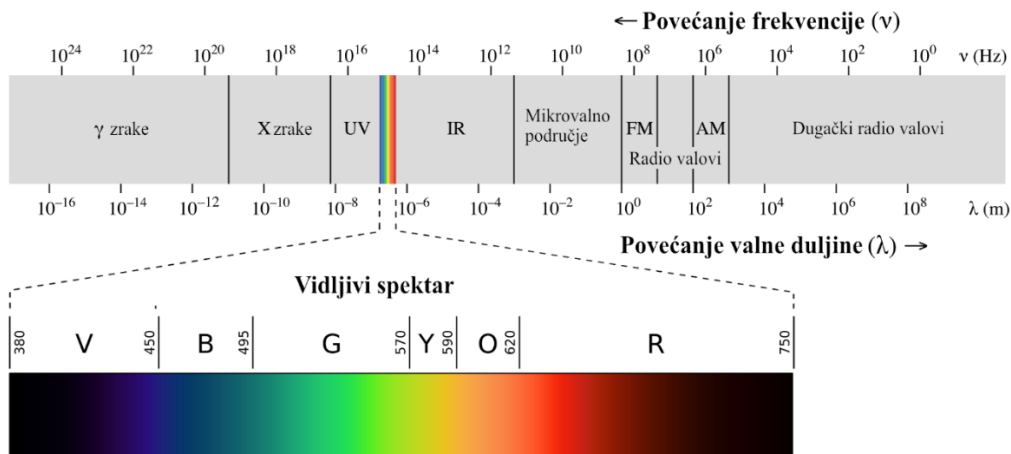
Precizno poznavanje vrijednosti vertikalnog koeficijenta atenuacije iradijance je važno u klimatskim istraživanjima, posebno kada je riječ o povezanosti stanja oceana i klimatskih promjena, u istraživanjima života u morima i oceanima (npr. mjerenje količine planktona), za razumijevanje ograničenja korištenja satelita u podvodnim istraživanjima, ali i u primjeni bežičnih podvodnih komunikacijskih tehnologija [1].

## 2 TEORIJA

Optika je grana fizike koja se bavi svojstvima svjetlosti. Na spoju geofizike i optike leži geofizička optika, koja se ovisno o vrsti medija kroz koji se svjetlost širi može podijeliti na atmosfersku i hidrološku optiku. Hidrološka optika se bavi ponašanjem svjetlosti u vodenom mediju, te se ovisno o vrsti medija nadalje može podijeliti na još uže grane. Ponašanje svjetlosti u vodenom mediju ovisi o svojstvima svjetlosti, ali i o optičkim svojstvima medija. Optička svojstva medija su ona svojstva koja opisuju interakciju svjetlosti i medija, te se pripisuju samom mediju [2].

### 2.1 Definiranje optičkih parametara

Podjela elektromagnetskog zračenja na intervale frekvencija se naziva elektromagnetski spektar. Od manje prema većoj frekvenciji, odnosno od veće prema manjoj valnoj duljini, spektar sadrži: radiovalove, mikrovalove, terahercno zračenje, infracrveno zračenje, vidljivu svjetlost, ultraljubičasto zračenje, x-zrake ili rengensko zračenje i gama zračenje (Slika 2.1). Vidljiva svjetlost je dio elektromagnetskog spektra koji ljudsko oko može detektirati, odnosno dio spektra u intervalu od 380 nm do 780 nm. Od posebnog interesa u hidrološkoj optici je fotosintetski aktivno zračenje (eng. photosynthetically active radiation, PAR), odnosno dio spektra od 400 nm do 700 nm pod kojim fotosintetski organizmi u procesu fotosinteze mogu iskoristiti energiju fotona [2].



Slika 2.1 Elektromagnetski spektar [3].

Radiometrija je grana optike koja se bavi mjerenjem svojstava elektromagnetskog zračenja, te je u okviru radiometrije definirano mnoštvo fizikalnih veličina. Energija ili količina zračenja (eng. *radiant energy*) je mjera ukupne energije u određenom vremenskom intervalu:

$$Q [J]. \quad (2.1)$$

Tok zračenja ili snaga zračenja (eng. *radiant flux, radiant power*) je energija zračenja po jedinici vremena:

$$\phi = \frac{dQ}{dt} [W]. \quad (2.2)$$

Jakost zračenja ili radijacijski intenzitet (eng. *radiant intensity*) je mjera toka zračenja po jedinici prostornog kuta (steradianu) u određenom smjeru:

$$I_{\omega} = \frac{d\phi_{\omega}}{d\omega} \left[ \frac{W}{sr} \right]. \quad (2.3)$$

Jakost zračenja izvora u određenom smjeru je jednaka toku zračenja kojeg emitira izvor u infinitezimalni stožac u određenom smjeru po jedinici prostornog kuta. Jakost zračenja u točki prostora je jednaka toku zračenja u promatranoj točki u infinitezimalnom stožcu u određenom smjeru po jedinici prostornog kuta. Steradian je bezdimenzionalna mjerna jedinica za prostorni kut. Jedan steradian je prostorni kut čiji se vrh nalazi u središtu kugle, a na sferi kugle omeđuje površinu jednaku kvadratu polumjera kugle. Steradian je bezdimenzionalna veličina.

Radijanca ili gustoća zračenja (eng. *radiance*) je mjera toka zračenja po jedinici prostornog kuta u određenom smjeru po jedinici površine okomite na tok zračenja:

$$L_{\omega} = \frac{d\phi}{dS \cos \theta d\omega} \left[ \frac{W}{sr m^2} \right]. \quad (2.4)$$

Radijanca u točki prostora je jednaka toku zračenja u promatranoj točki u određenom smjeru po jedinici prostornog kuta po jedinici površine okomite na tok zračenja, odnosno smjer propagacije zračenja. Površinska radijanca je jednaka toku zračenja kojeg emitira izvor u određenom smjeru po jedinici prostornog kuta po jedinici površine projekcije (površina vidljiva iz smjera gledanja). Radijanca je funkcija smjera definiranog zenitnim kutom  $\theta$  i azimutnim kutom  $\Phi$ . Izražena je u W po jedinici površine projekcije po steradianu u određenom smjeru. Površina projekcije je jednaka  $dS \cos(\theta)$ , a dio prostornog kuta  $d\omega$ . Za radijancu odlaznog zračenja S se odnosi na površinu izvora, a  $\omega$  na prostorni kut u koji zračenje odlazi. Za radijancu upadnog zračenja S se odnosi na površinu detektora, a  $\omega$  na prostorni kut iz kojeg zračenje dolazi gledano s detektora.

Radiozitet (eng. *radiosity*) je mjera toka odlaznog zračenja po jedinici površine:

$$J = \frac{d\phi}{dS} \left[ \frac{W}{m^2} \right]. \quad (2.5)$$

Specifično zračenje (eng. *radiant exitance, radiant emittance*) je mjera toka emitiranog zračenja po jedinici površine:

$$M = \frac{d\phi}{dS} \left[ \frac{W}{m^2} \right]. \quad (2.6)$$

Iradianca ili ozračenje (eng. *irradiance*) je mjera toka upadnog zračenja po jedinici površine:

$$E = \frac{d\phi}{dS} \left[ \frac{W}{m^2} \right]. \quad (2.7)$$

Iradianca se izražava u  $W/m^2$ , kvantima (fotonima) po  $s m^2$  ili mol kvantima po  $s m^2$ . Jedan mol kvanta sadrži Avogadrov broj fotona ( $6.02 \cdot 10^{23}$  fotona). Razlikujemo dolje usmjerenu, gore usmjerenu i skalarnu iradijancu. Dolje usmjerena iradianca  $E_d$  je iradianca na gornju stranu horizontalne plohe, dok je gore usmjerena iradianca  $E_u$

iradijanca na donju stranu horizontalne plohe. Rezultantna dolje usmjerena iradijanca  $\vec{E}$  je jednaka razlici dolje usmjerene i gore usmjerene iradijance:

$$\vec{E} = E_d - E_u. \quad (2.8)$$

Ukupna dolje usmjerena iradijanca (eng. *total downward irradiance*) je jednaka integralu po prostornom kutu preko cijele gornje hemisfere:

$$E_d = \int_{2\pi} L(\theta, \varphi) \cos \theta d\omega. \quad (2.9)$$

Ukupna gore usmjerena iradijanca (eng. *total upward irradiance*) je jednaka integralu po prostornom kutu preko cijele donje hemisfere:

$$E_u = \int_{-2\pi} L(\theta, \varphi) \cos \theta d\omega. \quad (2.10)$$

Rezultantna dolje usmjerena iradijanca (eng. *net downward irradiance*) izražena preko radijance glasi:

$$\vec{E} = \int_{4\pi} L(\theta, \varphi) \cos \theta d\omega. \quad (2.11)$$

Skalarna iradijanca (eng. *scalar irradiance*) je jednaka integralu distribucije radijance u točki u svim smjerovima oko te točke:

$$E_0 = \int_{4\pi} L(\theta, \varphi) d\omega. \quad (2.12)$$

Skalarna iradijanca se nadalje može podijeliti na dolje usmjerenu, gore usmjerenu i ukupnu skalarnu iradijancu. Dolje usmjerena skalarna iradijanca (eng. *downward scalar irradiance*) je jednaka integralu distribucije radijance preko cijele gornje hemisfere:

$$E_{0d} = \int_{2\pi} L(\theta, \varphi) d\omega. \quad (2.13)$$

Gore usmjerena skalarna iradijanca (eng. *upward scalar irradiance*) je jednaka integralu distribucije radijance preko cijele donje hemisfere:

$$E_{0u} = \int_{-2\pi} L(\theta, \varphi) d\omega. \quad (2.14)$$

Dok skalarna iradijanca tretira zračenje iz svih smjerova podjednako, kod iradijance je doprinos toka zračenja iz određenog smjera proporcionalan kosinusu zenitnog kuta. Refleksija iradijance (eng. *irradiance reflectance*) je omjer gore usmjerene i dolje usmjerene iradijance u određenoj točki polja:

$$R = \frac{E_u}{E_d}. \quad (2.15)$$

## 2.2 Podvodna atenuacija svjetlosti

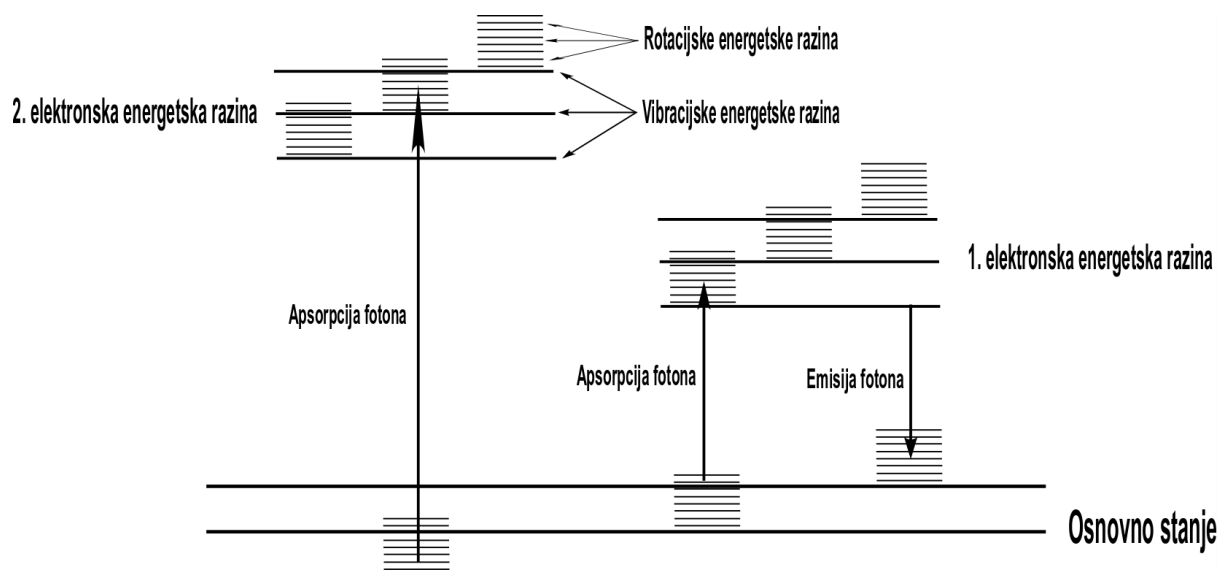
### 2.2.1 Apsorpcija i raspršenje

Apsorpcija i raspršenje su dva osnovna fizikalna procesa kojima vodeni medij utječe na atenuaciju svjetlosti koja se kroz njega širi. Ukupna energija molekule se može podijeliti na rotacijski, vibracijski i elektronski dio, te može poprimiti samo diskretne vrijednosti. Za elektronsku energiju je razlika između susjednih energetske razina najveća, a za rotacijsku energiju najmanja. Sudarom molekula u plinovitom ili tekućem stanju ili njihovom interakcijom u krutom stanju može doći do prijenosa vibracijske i rotacijske energije između molekula što uzrokuje prijelaz vibracijske ili rotacijske energije pojedine molekule u drugo energetske stanje.

Molekule, osim međusobno, mogu interagirati i s elektromagnetskim zračenjem, odnosno fotonima. Prolaskom fotona u relativnoj blizini molekule može doći do njegove apsorpcije od strane molekule pri čemu energija molekule poraste za vrijednost energije fotona. S obzirom da energija molekule može poprimiti samo diskretne vrijednosti mogu se apsorbirati samo fotoni određene energije, odnosno određene valne duljine. Fotoni u dalekom infracrvenom i mikrovalnom dijelu spektra imaju takvu energiju da njihova apsorpcija rezultira povećanjem rotacijske energije molekule. Fotoni u infracrvenom dijelu spektra imaju nešto veću energiju pa njihova apsorpcija rezultira povećanjem vibracijske energije. Fotoni u vidljivom dijelu spektra imaju dovoljno energije da apsorpcijom pobude elektron, odnosno molekulu, u više elektronske energetske stanje. Iz toga slijedi, a vidljivo je na slici 2.2, kako je razlika između elektronskih energetske razina najveća, između vibracijske razina je srednja,

a između rotacijskih razina je najmanja. Odnosno, svaka elektronska energetska razina se može podijeliti na više vibracijskih energetskih razina, koje se nadalje mogu podijeliti na više rotacijskih energetskih razina [2].

U koje će se energetska stanja molekula pobuditi ovisi o valnoj duljini apsorbiranog fotona. Složenije molekule, kao npr. klorofil, imaju više elektronskih energetskih razina koje dalje sadrže više vibracijskih, odnosno rotacijskih energetskih razina što znači da takve molekule mogu apsorbirati fotone cijelog niza različitih valnih duljina. Ukupni koeficijent apsorpcije vodenog medija pri određenoj valnoj duljini je jednak zbroju koeficijenata apsorpcije svake pojedine komponente tog medija koja apsorbira svjetlost pri promatranoj valnoj duljini.



Slika 2.2 Elektronske, vibracijske i rotacijske energetske razine molekule.

Raspršenje fotona u mediju je pojava promjene putanje fotona kroz medij zbog interakcije s nekom komponentom medija. Raspršenje samo po sebi ne uklanja foton iz medija, ali uzrokuje nepravilniju putanju što povećava ukupni put kojeg foton prijeđe do određene dubine. Što foton prijeđe veći put veća je vjerojatnost da će naići na komponentnu medija koja će ga apsorbirati.

Razlikujemo raspršenje uzrokovano fluktuacijama u gustoći medija i raspršenje na česticama. Raspršenje elektromagnetskog vala u plinovima je opisano modelom

Rayleigh-ovog raspršenja. Prema Rayleigh-ovoj teoriji električno polje zračenja u čestici plina inducira dipol koji oscilira frekvencijom koja odgovara frekvenciji zračenja. Dipol pri tome emitira zračenje iste frekvencije u svim smjerovima koje nazivamo raspršenim zračenjem. U medijima veće gustoće, kao što su tekućine, kontinuirano nasumično gibanje molekula uzrokuje lokalizirane mikroskopske fluktuacije gustoće koje se mogu opisati dipolima. Njihova interakcija s svjetlošću uzrokuje raspršenje slično Rayleigh-ovom. Gotovo svaki vodeni medij u prirodi sadrži mineralne (anorganske) čestice sa kopna ili sedimenta s dna, fitoplankton, bakterije, mrtve stanice i sl., koje zajednički nazivamo česticama i koje raspršuju svjetlost. Karakteristike raspršenja na česticama u najvećoj mjeri ovise o njenim dimenzijama [2].

### 2.2.2 Koeficijenti apsorpcije, raspršenja i atenuacije toka svjetlosti

U području geofizičke optike, konkretnije hidrološke optike, optička svojstva vodenog medija se dijele na inherentna (eng. *inherent optical properties*, IOP) i vidljiva ili aparentna (eng. *apparent optical properties*, AOP). Vrijednost inherentnih optičkih svojstava ovisi samo o sastavu vodenog medija, ne i o geometriji svjetlosnog polja. S druge strane, vidljiva optička svojstva su strogo gledano svojstva svjetlosnog polja. No s obzirom da prvenstveno ovise o inherentnim optičkim svojstvima vodenog medija, a manje o svojstvima upadnog svjetlosnog polja, smatra ih se svojstvima vodenog medija. Primjeri inherentnog svojstva vodenog medija su koeficijent apsorpcije i raspršenja, dok je koeficijent atenuacije primjer aparentnog optičkog svojstva.

Apsorpcija (eng. *absorptance*) je jednaka udjelu apsorbiranog toka u upadnom toku zračenja, raspršenje (eng. *scatterance*) je jednako udjelu raspršenog toka u upadnom toku zračenja, a atenuacija (eng. *attenuance*) je jednaka udjelu apsorbiranog i raspršenog toka u upadnom toku zračenja. Apsorpcija je dana relacijom (2.16), raspršenje relacijom (2.17), a atenuacija relacijom (2.18).

$$A = \frac{\Phi_a}{\Phi_0}, \quad (2.16)$$

$$B = \frac{\Phi_b}{\Phi_0}, \quad (2.17)$$



$$C = \frac{\Phi_c}{\Phi_0}. \quad (2.18)$$

gdje je  $\Phi_0$  upadni tok zračenja na neki fizikalni sustav,  $\Phi_a$  apsorbirani tok zračenja od strane sustava,  $\Phi_b$  raspršeni tok zračenja od strane sustava, a  $\Phi_c$  atenuirani tok zračenja od strane sustava.

Neka je infinitezimalno tanki sloj vodenog medija debljine  $\Delta r$  osvjetljen svjetlosnom zrakom pod pravim kutom. Omjer apsorpcije tog sloja i njegove debljine je jednak koeficijentu apsorpcije, omjer raspršenja tog sloja i njegove debljine je jednak koeficijentu raspršenja, a omjer atenuacije tog sloja i njegove debljine je jednak koeficijentu atenuacije. Koeficijent apsorpcije je dan relacijom (2.19), koeficijent raspršenja relacijom (2.20), a koeficijent atenuacije relacijom (2.21).

$$a = \frac{\Delta A}{\Delta r}, \quad (2.19)$$

$$b = \frac{\Delta B}{\Delta r}, \quad (2.20)$$

$$c = \frac{\Delta C}{\Delta r} = a + b, \quad (2.21)$$

gdje je  $\Delta A$  apsorpcija,  $\Delta B$  raspršenje, a  $\Delta C$  atenuacija infinitezimalno tankog sloja vodenog medija. Koeficijenti (2.19-2.21) se izražavaju u  $m^{-1}$ .

Neka je vodeni medij konačne debljine osvjetljen pod pravim kutom svjetlosnom zrakom toka zračenja  $\Phi_0$ . Prolaskom kroz medij zraka gubi na intenzitetu uslijed apsorpcije i raspršenja. Atenuacija toka zračenja za infinitezimalni sloj zračenja debljine  $\Delta r$  na dubini  $r$  vodenog medija je jednaka:

$$\Delta C = -\frac{\Delta \Phi}{\Phi}, \quad (2.22)$$

gdje je  $\Phi$  tok zračenja na dubini  $r$  vodenog medija, a  $\Delta \Phi$  promjena toka zračenja za infinitezimalno tanki sloj vodenog medija debljine  $\Delta r$  na dubini  $r$  vodenog medija.  $\Delta \Phi$  mora biti negativan pa je dodan negativni predznak. Iz relacija (2.21) i (2.22) slijedi:

$$\frac{\Delta \Phi}{\Phi} = -c \Delta r, \quad (2.23)$$

čijim se integriranjem po dubini od površine, dubina 0, do dubine  $r$  dobije:

$$\ln\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) = -cr, \quad (2.24)$$

odnosno,

$$\Phi = \Phi_0 e^{-cr}. \quad (2.25)$$

Izraz (2.25) se općenito može zapisati kao:

$$\Phi(z) = \Phi(0)e^{-c(z)z}, \quad (2.26)$$

gdje je  $\Phi(z)$  tok zračenja na dubini  $z$ ,  $\Phi(0)$  tok zračenja odmah ispod površine, a  $c(z)$  koeficijent atenuacije na dubini  $z$  [2].

### 2.2.3 Vertikalni koeficijenti atenuacije iradijance

Veličina koja se najčešće mjeri pri proučavanju podvodnog svjetlosnog polja ili optičkih svojstava vodenog medija je iradijanca. Propagacijom svjetlosti kroz vodeni medij iradijanca, kao i druge veličine koje u sebi sadrže tok zračenja po jedinici površine, se povećanjem dubine smanjuju približno eksponencijalno [4]. Iradijanca  $E(z)$  na dubini  $z$  je dana relacijom (2.27), odnosno (2.28), analogno relaciji (2.26) za tok zračenja. Uzeto je da je  $z$ -os pozitivna prema dolje.

$$\frac{dE(z)}{dz} = -K(z)E(z), \quad (2.27)$$

$$E(z) = E(0)e^{-K(z)z}, \quad (2.28)$$

gdje je  $E(z)$  iradijanca na dubini  $z$ ,  $E(0)$  iradijanca odmah ispod površine, a  $K(z)$  vertikalni koeficijent atenuacije iradijance na dubini  $z$ . Optička svojstva vodenog medija se mogu razlikovati s dubinom, pa se tako i vertikalni koeficijent atenuacije iradijance može mijenjati s dubinom. Zbog toga se općenito za koeficijente osim zapisa  $K$  koristi i zapis  $K(z)$ . Ako promjene promatranih optičkih svojstava s dubinom nisu značajne, što je najčešće slučaj, može biti dovoljno odrediti prosječnu vrijednost vertikalnog koeficijenta atenuacije za promatrani interval dubine koja se označava s  $K(av)$ . Takav koeficijent jednom vrijednošću opisuje gušenje svjetlosti u promatranom intervalu dubine vodenog medija. Optičko svojstvo vodenog medija koje ne ovisi o dubini je posebno korisno u analizi interakcije svjetlosti i vodenog medija. Ako je

funkcija  $K(z)$  približno konstantna onda se ovisnost iradijance  $E$  o dubini može izraziti prema relaciji:

$$E(z) = E(0)e^{-K(av)z}, \quad (2.29)$$

gdje je  $E(z)$  iradijanca na dubini  $z$ ,  $E(0)$  iradijanca odmah ispod površine, a  $K(av)$  prosječni vertikalni koeficijent atenuacije iradijance za interval dubine od površine do dubine  $z$  [4]. Prosječni vertikalni koeficijent atenuacije iradijance je jednak:

$$K(av) = \frac{\int_0^{\infty} K(z)dz}{\int_0^{\infty} dz}. \quad (2.30)$$

Može se definirati i prosječni težinski vertikalni koeficijent atenuacije iradijance,  ${}^wK(av)$ , koji je jednak integralu produkta  $K(z)$  i  $E(z)$  po svim dubinama podijeljen integralom iradijance po svim dubinama, te glasi:

$${}^wK(av) = \frac{\int_0^{\infty} K(z)E(z)dz}{\int_0^{\infty} E(z)dz}. \quad (2.31)$$

U nastavku su definirani koeficijenti za prethodno definirane tipove iradijance (2.9-2.12) [2]. Vertikalni koeficijent atenuacije dolje usmjerene iradijance je jednak:

$$K_d = -\frac{d \ln E_d}{dz} = -\frac{1}{E_d} \frac{dE_d}{dz}, \quad (2.32)$$

gore usmjerene iradijance:

$$K_u = -\frac{d \ln E_u}{dz} = -\frac{1}{E_u} \frac{dE_u}{dz}, \quad (2.33)$$

rezultantne iradijance:

$$K_E = -\frac{d \ln(E_d - E_u)}{dz} = -\frac{1}{(E_d - E_u)} \frac{d(E_d - E_u)}{dz}, \quad (2.34)$$

i skalarne iradijance:

$$K_0 = -\frac{d \ln E_0}{dz} = -\frac{1}{E_0} \frac{dE_0}{dz}. \quad (2.35)$$

### 2.3 Lambertova W funkcija

Lambertova metoda procjene vertikalnog koeficijenta atenuacije iradijance uključuje korištenje Lambert W funkcije koja do sada nikada nije upotrijebljena u procjeni ovog koeficijenta. Ova je funkcija bila neupotrebljavana jako dugo, sve do ponovnog pojavljivanja u drugoj polovici dvadesetog stoljeća. 1758. god. Johann Heinrich Lambert je riješio trinomnu jednadžbu:

$$x = q + x^m, \quad (2.36)$$

tako što je za  $x$  pronašao razvoj u red s potencijama  $q$ . Kasnije je razvoj u red proširio i za potencije od  $x$ . Uvođenjem supstitucija  $x = x^{-\beta}$ ,  $m = \alpha\beta$  i  $q = (\alpha - \beta)v$  Leonhard Euler je transformirao Lambertovu jednadžbu (2.36) i dobio oblik:

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta)vx^{\alpha+\beta}. \quad (2.37)$$

Eulerova verzija Lambertovog razvoja u redu je oblika:

$$\begin{aligned} x^n = 1 + nv + \frac{1}{2}n(n + \alpha + \beta)v^2 + \frac{1}{6}n(n + \alpha + 2\beta)(n + 2\alpha + \beta)v^3 \\ + \frac{1}{24}n(n + \alpha + 3\beta)(n + 2\alpha + 2\beta)(n + 3\alpha + \beta)v^4 \\ + \text{etc.} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Euler je zatim promotrio specijalan slučaj kada je  $\alpha = \beta$ . Dijeljenjem jednadžbe (2.37) s  $(\alpha - \beta)$  kada  $\beta \rightarrow \alpha$  dobije se jednadžba:

$$\log x = vx^\alpha. \quad (2.39)$$

Euler je zaključio da ako može riješiti jednadžbu (2.39) za  $\alpha = 1$ , onda je može riješiti za bilo koji  $\alpha \neq 0$ . Ako se jednadžba (2.39) pomnoži s  $\alpha$ ,  $\alpha \log x$  zapiše kao  $\log x^\alpha$ , uvedu supstitucije  $z = x^\alpha$  i  $u = \alpha v$  dobije se  $\log z = uz$  što je jednako jednadžbi (2.39) za specijalan slučaj kada je  $\alpha = 1$ . Euler je nadalje riješio ovu jednadžbu upotrebom razvoja u red (2.38). Uzeo je da je  $\alpha = \beta = 1$  te razvoj u red (2.38) zapisao kao razvoj u red za  $(x^n - 1)/n$ . Uzevši da je  $n = 0$  iz jednadžbe (2.38) i (2.39) je na lijevoj strani jednadžbe dobio  $\log x$ , a na desnoj razvoj u red, odnosno dobio je jednadžbu:

$$\log x = v + \frac{2^1}{2!}v^2 + \frac{3^2}{3!}v^3 + \frac{4^3}{4!}v^4 + \frac{5^4}{5!}v^5 + \text{etc.} \quad (2.40)$$

Dobiveni razvoj konvergira za  $|v| < 1/e$ , te je jednak  $-W(-v)$  gdje se  $W(z)$  definira kao funkcija koja zadovoljava jednadžbu:

$$W(z)e^{W(z)} = z. \quad (2.41)$$

Drugim riječima na temelju Lambertova rada Leonhard Euler je 1779. god. riješio jednadžbu oblika:

$$we^w = a, \quad (2.42)$$

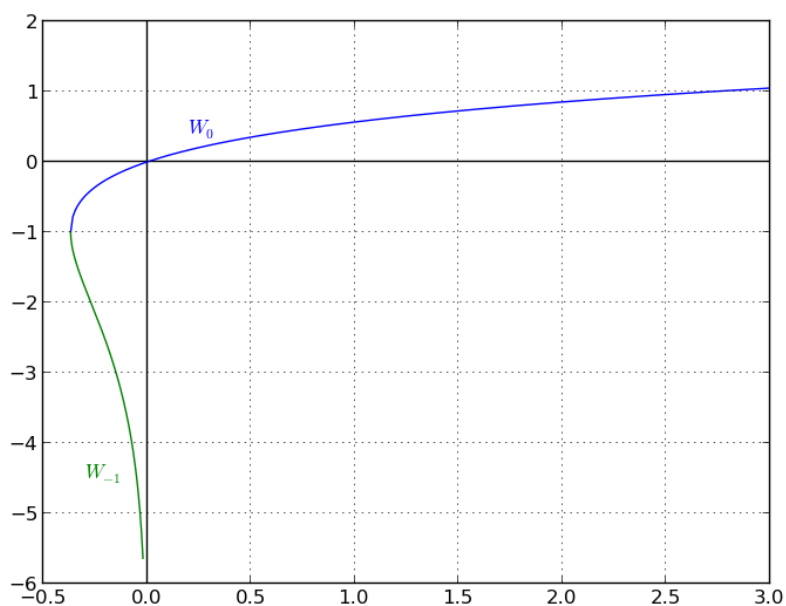
tako što je odredio inverz funkcije  $f(w) = we^w$ , gdje je  $w$  bilo koji kompleksni broj. Taj inverz se danas naziva Lambert  $W$  funkcija, te se ne može izraziti preko elementarnih funkcija. Ako su  $z$  i  $w$  bilo koji kompleksni brojevi izraz:

$$we^w = z, \quad (2.43)$$

vrijedi ako i samo ako je:

$$w = W_k(z), \quad (2.44)$$

gdje je  $k$  neki cijeli broj.  $W_k(z)$  je višeznačna kompleksna funkcija jedne kompleksne varijable. Višeznačna funkcija se može rastaviti na više jednoznačnih funkcija, koje se nazivaju granama. Svakoј vrijednosti indeksa  $k$  odgovara jedna grana. Ako je  $z$  realan i ispunjava uvjet  $-1/e \leq z < 0$  funkcija  $W(z)$  može poprimiti dvije realne vrijednosti. Oznaka grane koja zadovoljava uvjet  $W(z) \geq -1$  je  $W_0$ , a one koja zadovoljava uvjet  $W(z) \leq -1$  je  $W_{-1}$ .  $W_0$  se naziva glavna grana Lambertove  $W$  funkcije [5]. Lambertova funkcija u programskom jeziku MATLAB je dana naredbom "lambertw(k,x)", gdje  $k$  označava granu Lambertove  $W$  funkcije. Sintaksa vraća realne vrijednosti samo za  $k=0$  i  $k=-1$ .



Slika 2.3 Dijagram realnih grana Lambertove W funkcije [6].

Uvrštavanjem jednadžbe (2.28) u jednadžbu (2.27) slijedi:

$$\frac{dE(z)}{dz} = -K(z)E_0 e^{-K(z)z}. \quad (2.45)$$

Množenjem obje strane jednadžbe (2.45) s  $z$  i premještanjem varijabli se dobije izraz:

$$-K(z)ze^{-K(z)z} = \frac{z}{E_0} \frac{dE(z)}{dz}. \quad (2.46)$$

Jednadžba (2.35) je oblika:

$$xe^x = a, \quad (2.47)$$

čije je rješenje po definiciji jednako  $W(a)$ . Slijedi da se rješenje jednadžbe (2.46) za  $K$  može izraziti preko Lambertove W funkcije kao:

$$K(z) = -\frac{1}{z} W\left(\frac{z}{E_0} \frac{dE(z)}{dz}\right). \quad (2.48)$$

## 3 METODOLOGIJA

### 3.1 Podatci korišteni u analizi

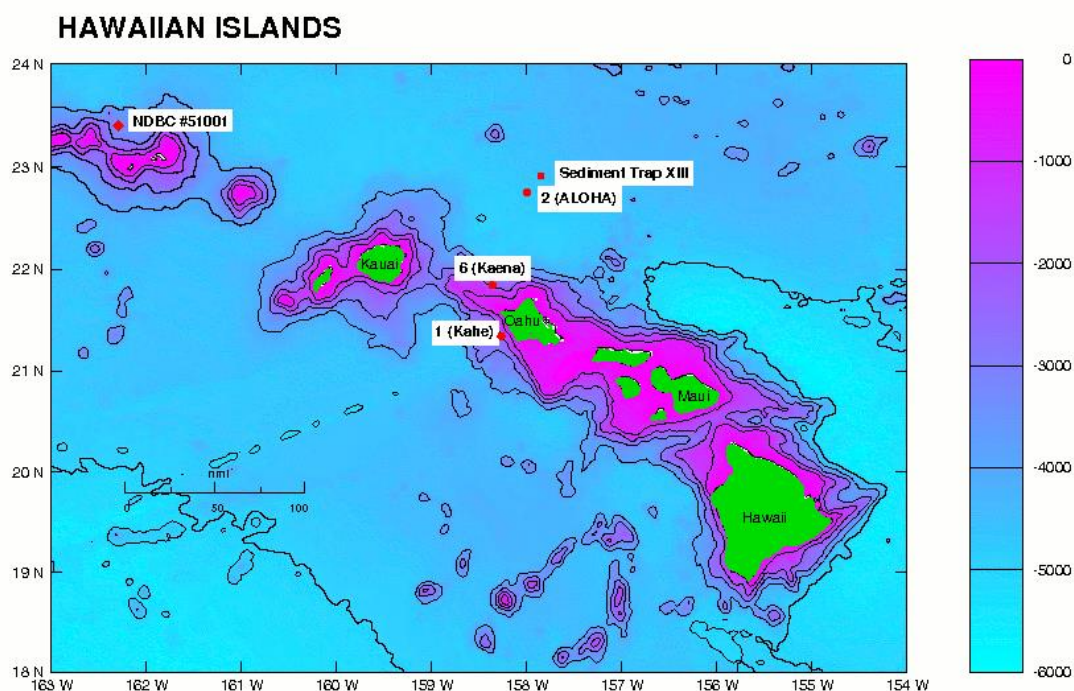
Podatci obrađivani u ovom radu su preuzeti s web stranice programa HOT (eng. *Hawaii Ocean Time-Series*) [7].

#### 3.1.1 Hawaii Ocean Time-Series

Program je uspostavljen 1988. god. od strane Havajskog Sveučilišta, a financiran je od strane američke Nacionalne zaklade za znanost (eng. *Nacional Science Foundation*, NSF). Cilj programa je dugoročno i kontinuirano prikupljanje, distribuiranje i interpretiranje mjerenja fizičkih i biokemijskih oceanografskih parametara. Specifičnost ovakvih i sličnih programa je u tome što omogućavaju analiziranje sporih procesa, te rijetkih i nepredvidivih događaja u oceanu [7].

Mjerenja u sklopu HOT programa se, osim uz instrumente pričvršćene na plutače i usidrene na morskom dnu, prikupljaju pomoću periodičkih putovanja istraživačkih brodova s kojih se na određenim lokacijama u ocean spuštaju mjerni instrumenti. Ekspedicije se u pravilu organiziraju jednom mjesečno. Mjerenja se provode u sjevernom dijelu Tihog oceana na više lokacija u blizini Havajskog otočja. Najvažnija priobalna postaja je Kahe (21 20.6' N, 158 16.4' W) u blizini Havajskog otoka Oahu, dubine od 1500 metara. Najvažnija i najudaljenija postaja na otvorenom oceanu je ALOHA (22 45.0' N, 158 00.0' W) približno 100 km od otoka Oahu, dubine od čak 4750 metara (Slika 3.1).

Podatci se jednostavno mogu preuzeti putem programa HOT-DOGS (eng. *Hawaii Ocean Time-series Data Organization & Graphical System*), program za grafički prikaz i preuzimanje podataka prikupljenih u sklopu projekta *Hawaii Ocean Time-series Project*. Uz definiranje nekoliko parametara program dopušta brzo pretraživanje baze podataka prikupljenih u sklopu HOT projekta. Prikupljeni podatci se objavljuju neobrađeni, te su javno dostupni [7].



Slika 3.1 Postaje Kahe i ALOHA u Havajskog otočju [8].

### 3.1.2 Satlantic HyperPro

Mjerenja podvodne iradijance korištena u ovom radu su prikupljena Satlantic HyperPro sondom (Slika 3.2). Sonda se spušta ručno u ocean s istraživačkog broda. Opremljena je s dva hiperspektralna radiometra, sensorima za mjerenje temperature, tlaka, vodljivosti, koncentracije klorofila, rastopljene fluorescentne tvari i većih čestica. Jedan hiperspektralni radiometar je okrenut prema gore i mjeri uzlaznu iradijancu, dok je drugi okrenut prema dolje i mjeri dolje usmjerenu iradijancu. U kombinaciji sa sondom se koristi i spektralni radiometar na površini broda koji mjeri iradijancu na površini oceana, tj. u zraku. Korišteni hiperspektralni radiometri mjere iradijancu u dijelu spektra od 350 nm do 800 nm s rezolucijom od  $10 \pm 0.3$  nm. Satlantic HyperPro sonda je u upotrebi od veljače 2010. god [7].






Slika 3.2 Sonda Satlantic HyperPro [9].

Na slici 3.3 je prikazano sučelje programa HOT-DOGS za podatke prikupljene sondom Satlantic HyperPro. Kategorija *Cruise* se odnosi na redni broj putovanja. U trenutku pisanja ovog rada posljednji dostupni podatci su za siječanj 2020. god. Od početka korištenja sonde obavljena su 103 putovanja istraživačkim brodom, približno jednom mjesečno, s rednim brojevima od 215 do 318. Kategorija *Station* se odnosi na broj mjerne postaje (lokacije) na kojoj se izvode mjerenja, gdje npr. 1 označava postaju Kahe, a 2 ALOHA postaju. Kategorija *Profile* se odnosi na broj profila prikupljenog na nekoj postaji pri određenom putovanju. Kategorija *Value* za *x-axis* i *y-axis* nudi opcije: *Time od Day*, *Depth*, *Density*, *Temperature*, *Salinity*, *Fluorescence*, *PAR*, *Surface PAR*, *%PAR*, *Blue (470) Backscatter*, *Red (700) Backscatter*, *Kpar*, 412, 442, 488, 490, 510, 530, 550, 554, 560, 620, 664, 666, 670, 678, 682, 708, 748, 754, 760, 764, 778 nm. U kategoriju *Axis* se unose granične vrijednosti x i y osiju. Kategorija *Function* nudi opcije: *Downwelling Irradiance (Ed)*, *Upwelling Irradiance (Lu)*, *Surface Irradiance (Es)*. Zbog nestabilnosti nagiba sonde pri njenom izvlačenju događa se greška pri mjerenju gore usmjerene iradijance pa ti podatci nisu objavljeni. Profili iradijance u ovisnosti o dubini su dostupni za PAR dio spektra i za valne duljine od 412, 442, 488, 490, 510, 530, 550, 554, 560, 620, 664, 666, 670, 678, 682, 708, 748, 754, 760, 764 i 778 nm.

» Home » HOT-DOGS

Home Overview Data Nowcast References Media Spec. Topics Related Proj.

Modify Data Extraction Vertical Profiles Horizontal Profiles Miscellaneous Help

 Hawaii Ocean Time-series  
Data Organization & Graphical System  
(HOT-DOGS)

Hyperspectral (I)rradiance Display

	Value	Function
Cruise #	294	X-axis: PAR <input type="text"/> Downwelling Irradiance (Ed) <input type="text"/>
Station #	1	Y-axis: Depth <input type="text"/> Downwelling Irradiance (Ed) <input type="text"/>
Profile #	1	Axis <input type="text"/>

Output type:

Include Grid Lines:

Submit Reset View Query

Home About Us Cruise Request Data Cruise Schedule Contact Us Login

Funding provided by the National Science Foundation (NSF)

Slika 3.3 Slika sučelja programa HOT-DOGS za mjerenja prikupljena Satlantic HyperPro sondom [10].

### 3.1.3 Problemi mjerenja podvodne iradijance

Glavni uzroci pogreške pri mjerenju podvodne iradijance su utjecaj valova, promjena površinske iradijance uslijed prolaska oblaka i pojava sjene istraživačkog broda.

Konveksni dio vala na površini djeluje kao konvergentna leća koja fokusira svjetlost, dok konkavni dio površinskog vala djeluje kao konkavna leća koja defokusira svjetlost na nekoj dubini u moru. Pomicanje valova na morskoj površini time uzrokuje fluktuacije iradijance kako unutar pojedinog morskog sloja na određenoj dubini, tako i između morskih slojeva, odnosno po dubini. Dubina do koje se mogu detektirati fluktuacije iradijance uslijed valova ovisi o bistrini mora, no u svakom slučaju utjecaj postaje zanemariv već na dubini od nekoliko metara. Utjecaj valova je značajniji za dolje

usmjerenu iradijancu, dok je praktički zanemariv za gore usmjerenu iradijancu. Određenim izgladivanjem podataka se utjecaj može smanjiti.

Fluktuacije uslijed pomicanja oblaka su znatno sporije od onih uzrokovanim valovima, no s obzirom da je za mjerenje iradijance po dubini potrebno određeno vrijeme utjecaj je ipak značajan. Ako se mjerenja podvodne iradijance vrše za određivanje vertikalnog koeficijenta atenuacije uz njih je potrebno kontinuirano mjeriti i iradijancu na morskoj površini (na palubi) prema kojoj se mjerenja podvodne iradijance naknadno prilagode. Utjecaj oblaka je jednak za iradijancu prema gore i prema dolje.

Mogućnost utjecaja sjene broda se umanju spuštanjem sonde sa sunčane strane broda. Grešku pri mjerenju iradijance prema gore može uzrokovati i sam instrument bacanjem sjene na senzor [2].

#### 3.1.4 Odabir podataka

U analizi je iskorištena većina objavljenih mjerenja podvodne i površinske dolje usmjerene iradijance u PAR dijelu spektra prikupljenih Satlantic HyperPro sondom na lokaciji Kahe [7]. Od ukupno 104 obavljena putovanja u periodu od veljače 2010. god. do siječnja 2020. god. na njih 85 su prikupljena mjerenja podvodne i površinske dolje usmjerene iradijance na lokaciji Kahe. Od ta 85 para profila odbačeno ih je 11 jer su vizualnom analizom njihova grafičkog prikaza utvrđene značajne anomalije u izmjerenim vrijednostima iradijance, te je pretpostavljeno da nisu reprezentativni. U konačnici je iskorišteno 74 parova profila. Svaki profil sadrži mjerenja podvodne, odnosno površinske dolje usmjerene iradijance za niz diskretnih intervala dubine od 1 metar do konačne dubine od maksimalno 200 metara. Preuzeti profili podvodne dolje usmjerene iradijance ne sadrže vrijednosti iradijance unutar prvih nekoliko metara ispod površine, jer takva mjerenja zbog utjecaja valova obično imaju veliku grešku. Profili površinske dolje usmjerene iradijance u ovisnosti o dubini su dobiveni na način da je vrijednost površinske dolje usmjerene iradijance u nekom trenutku pripisana dubini na kojoj je bila podvodna sonda u tom trenutku. Svi korišteni podatci su javno dostupni. Podatci su objavljeni neobrađeni te su takvi i preuzeti.

### 3.2 Procjena vertikalnog koeficijenta atenuacije dolje usmjerene iradijance

Fluktuacije u vrijednostima podvodne dolje usmjerene iradijance uslijed pomicanja oblaka se mogu otkloniti promatranjem omjera podvodne i površinske dolje usmjerene iradijance koji će se nadalje nazivati relativna dolje usmjerena iradijanca, koja je dana relacijom:

$$E'_d(z) = \frac{E_d(z)}{E_s(z)}, \quad (3.1)$$

gdje je  $E'_d(z)$  relativna dolje usmjerena iradijanca na dubini  $z$ ,  $E_d(z)$  podvodna dolje usmjerena iradijanca na dubini  $z$ , a  $E_s(z)$  površinska dolje usmjerena iradijanca u trenutku kada je na dubini  $z$  izmjerena dolje usmjerena iradijanca  $E_d(z)$ . Pri procjeni vertikalnog koeficijenta atenuacije dolje usmjerene iradijance je namjesto podvodne dolje usmjerene iradijance korištena relativna dolje usmjerena iradijanca.

U nastavku,  $E'_d(z_i)$  je relativna dolje usmjerena iradijanca na dubini  $z_i$ , gdje je  $i = 1, 2, \dots, n$ , gdje je  $n$  ukupni broj podvodnih mjerenja dolje usmjerene iradijance promatranog profila. Na samom početku analize je svaka vrijednost podvodne i površinske dolje usmjerene iradijance profila usrednjena s dvije susjedne vrijednosti. U radu su ukupno testirane četiri metode: metoda najmanjih kvadrata, logaritamska metoda, derivacijska metoda i Lambertova metoda. Metodom najmanjih kvadrata je koeficijent  $K_d(av)$  direktno procijenjen za svaki profil. Nadalje, logaritamskom, derivacijskom i Lambertovom metodom je za svaki profil prema relacijama (3.2), (3.3) i (3.4) redom, procijenjen vertikalni koeficijent atenuacije dolje usmjerene iradijance na dubini  $z_i$  za sve dubine pripadnog profila.

$$K_d(z_{i+1}) = -\frac{1}{z_{i+2} - z_i} \ln \left( \frac{E'_d(z_{i+2})}{E'_d(z_i)} \right), \quad (3.2)$$

$$K_d(z_i) = -\frac{1}{E'_d(z_i)} \frac{dE'_d(z_i)}{dz}, \quad (3.3)$$

$$K_d(z_i) = -\frac{1}{z_i - z_1} W \left( \frac{z_i - z_1}{E'_d(z_1)} \frac{dE'_d(z_i)}{dz} \right). \quad (3.4)$$

Zbog utjecaja valova mjerenja iradijance nisu prikupljena odmah ispod površine. Prvo mjerenje u preuzetim profilima je najčešće na dubini od 3 do 5 metara, pa je  $z_1$  u relaciji 3.4 različito od nule.

Derivacija relativne iradijance po dubini, koja se javlja u jednadžbama (3.3) i (3.4), je aproksimirana metodom konačnih razlika uz grešku prvog reda aproksimacijom unaprijed (3.5) i aproksimacijom unatrag (3.6) i greškom drugog reda s centralnom aproksimacijom (3.7), aproksimacijom unaprijed (3.8) i aproksimacijom unatrag (3.9). Najbolja aproksimacija je uzeta kao reprezentativna.

$$\frac{dE'_d(z_i)}{dz} = \frac{E'_d(z_i + h) - E'_d(z_i)}{h}, \quad (3.5)$$

$$\frac{dE'_d(z_i)}{dz} = \frac{E'_d(z_i) - E'_d(z_i - h)}{h}, \quad (3.6)$$

$$\frac{dE'_d(z_i)}{dz} = \frac{E'_d(z_i + h) - E'_d(z_i - h)}{2h}, \quad (3.7)$$

$$\frac{dE'_d(z_i)}{dz} = \frac{-E'_d(z_i + 2h) + 4E'_d(z_i + h) - 3E'_d(z_i)}{2h}, \quad (3.8)$$

$$\frac{dE'_d(z_i)}{dz} = \frac{3E'_d(z_i) - 4E'_d(z_i - h) + E'_d(z_i - 2h)}{2h}. \quad (3.9)$$

Vrijedi  $h = z_{i+1} - z_i$ . Za skup vrijednosti  $K_d(z_i)$  dobivenih logaritamskom, derivacijskom i Lambertovom metodom za svaki profil je zatim određen prosječni vertikalni koeficijent atenuacije dolje usmjerene iradijance pojedinog profila prema relaciji:

$$K_d(av) = \frac{\sum_{i=1}^n K_d(z_i)}{n}, \quad (3.10)$$

i težinski prosječni vertikalni koeficijent atenuacije dolje usmjerene iradijance pojedinog profila prema relaciji:

$${}^w K_d(av) = \frac{\sum_{i=1}^n K_d(z_i) E'_d(z_i)}{\sum_{i=1}^n E'_d(z_i)}. \quad (3.11)$$

Nazivu prosječnog vertikalnog koeficijenta atenuacije dolje usmjerene iradijance se u nastavku dodaje pridjev obični, kako bi se razlikovao od svog težinskog ekvivalenta. Obični, odnosno težinski prosječni vertikalni koeficijent atenuacije dolje usmjerene

iradijance je prema prethodno opisanom postupku određen za svaki od 74 analiziranih profila. Ukupni obični, odnosno ukupni težinski prosječni vertikalni koeficijent atenuacije dolje usmjerene iradijance je jednak srednjoj vrijednosti običnih, odnosno težinskih prosječnih vertikalnih koeficijenata atenuacije dolje usmjerene iradijance svih analiziranih profila prema relacijama (3.12), odnosno (3.13), gdje je broj analiziranih profila  $m$  jednak 74.

$$K_{d,ukupni}(av) = \frac{\sum_{j=1}^m K_{d,j}(av)}{m}, \quad (3.12)$$

$${}^w K_{d,ukupni}(av) = \frac{\sum_{j=1}^m {}^w K_{d,j}(av)}{m}. \quad (3.13)$$

### 3.3 Testiranje metoda procjene profila

Procijenjeni profil je funkcija ovisnosti dolje usmjerene relativne iradijance o dubini izračunate nekom od relacija (3.14-3.17), gdje su koeficijenti  $K_d(av)$  i  ${}^w K_d(av)$  prethodno procijenjeni iz izmjerenih profila nekom od spomenute četiri metode.

$$E'_d(z_i) = E'_d(z_1) e^{-K_d(av)(z_i - z_1)}, \quad (3.14)$$

$$E'_d(z_i) = E'_d(z_1) e^{-{}^w K_d(av)(z_i - z_1)}, \quad (3.15)$$

$$E'_d(z_{i+1}) = E'_d(z_i) e^{-K_d(av)(z_{i+1} - z_i)}, \quad (3.16)$$

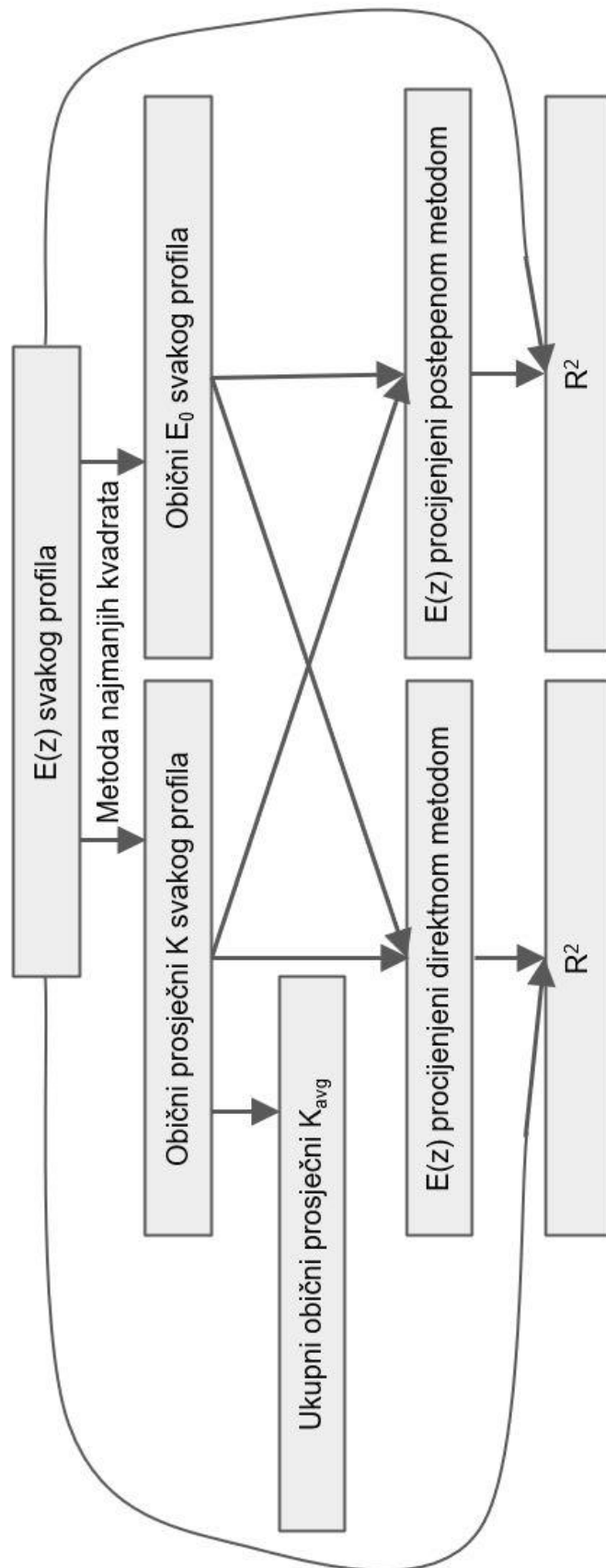
$$E'_d(z_{i+1}) = E'_d(z_i) e^{-{}^w K_d(av)(z_{i+1} - z_i)}. \quad (3.17)$$

U kontekstu vrste vertikalnog koeficijenta atenuacije dolje usmjerene iradijance za procjenu profila iradijance razlikujemo običnu i težinsku metodu, dok u kontekstu načina računanja dolje usmjerene iradijance na pojedinoj dubini za procjenu profila iradijance razlikujemo direktnu i postepenu metodu. Shodno tome, procjena profila relacijom (3.14) je nazvana obična direktna metoda, relacijom (3.15) težinska direktna metoda, relacijom (3.16) obična postepena metoda i relacijom (3.17) težinska postepena metoda. Kako je opisano u prethodnom poglavlju, za procjenu  $K_d(av)$  i  ${}^w K_d(av)$  pri pojedinoj dubini korištene su 4 metode: metoda najmanjih kvadrata, logaritamska metoda, derivacijska metoda i Lambertova metoda.

U ovom radu je analizirano koja je od četiri metode najbolja za procjenu vertikalnih koeficijenata atenuacije dolje usmjerene iradijance,  $K_d(av)$  i  ${}^wK_d(av)$ , te jeli procjena profila iradijance bolja običnom direktnom, težinskom direktnom, običnom postepenom ili težinskom postepenom metodom. Analiza je provedena određivanjem koeficijenta determinacije,  $R^2$ , između izmjerenih i odgovarajućih procijenjenih profila iradijance.

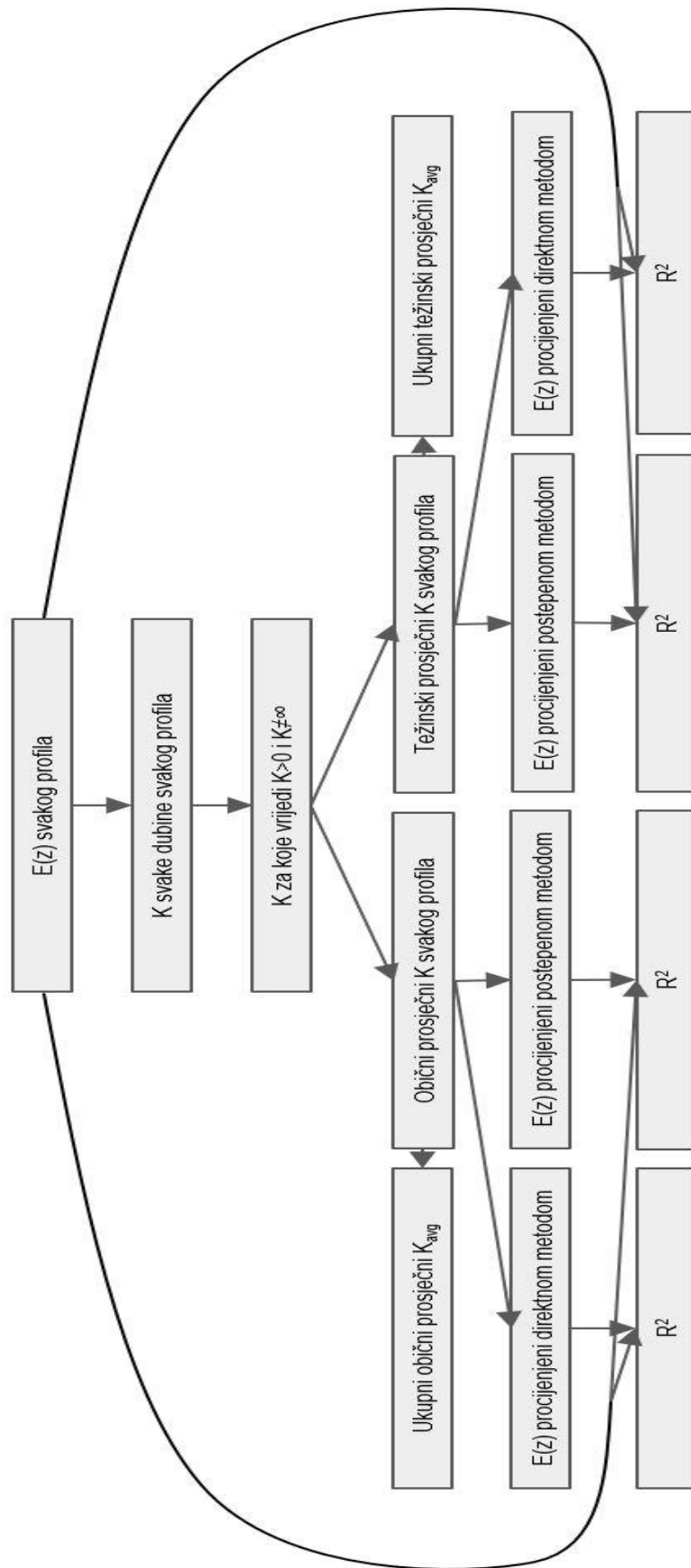
### **3.4 Dijagrami toka koda**

U nastavku su prikazani dijagrami toka koda svake od četiri primijenjene metode. Analiza podataka je provedena u programskom jeziku MATLAB. Ključni dijelovi koda po metodama su dani u prilogu ovog rada.

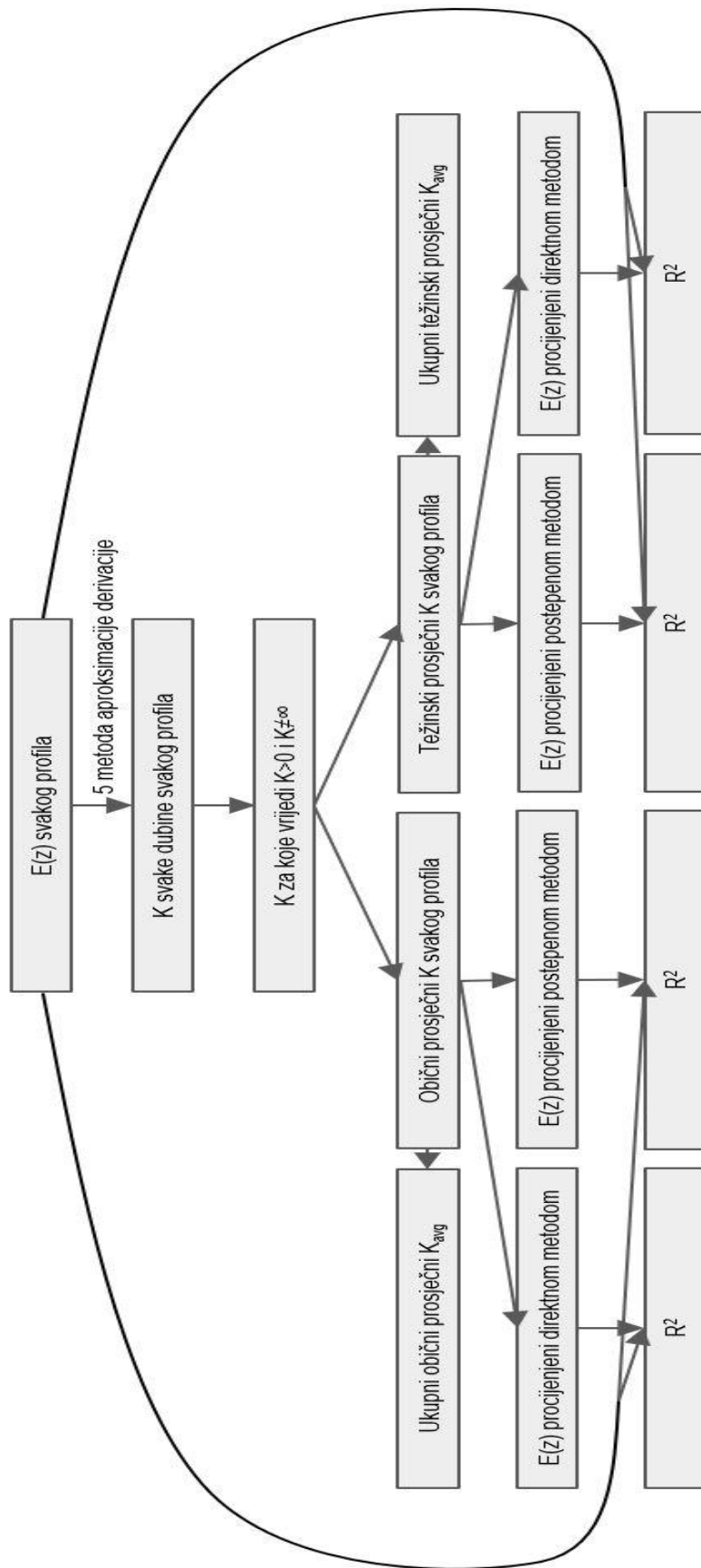


Slika 3.4 Dijagram toka koda metode najmanjih kvadrata.

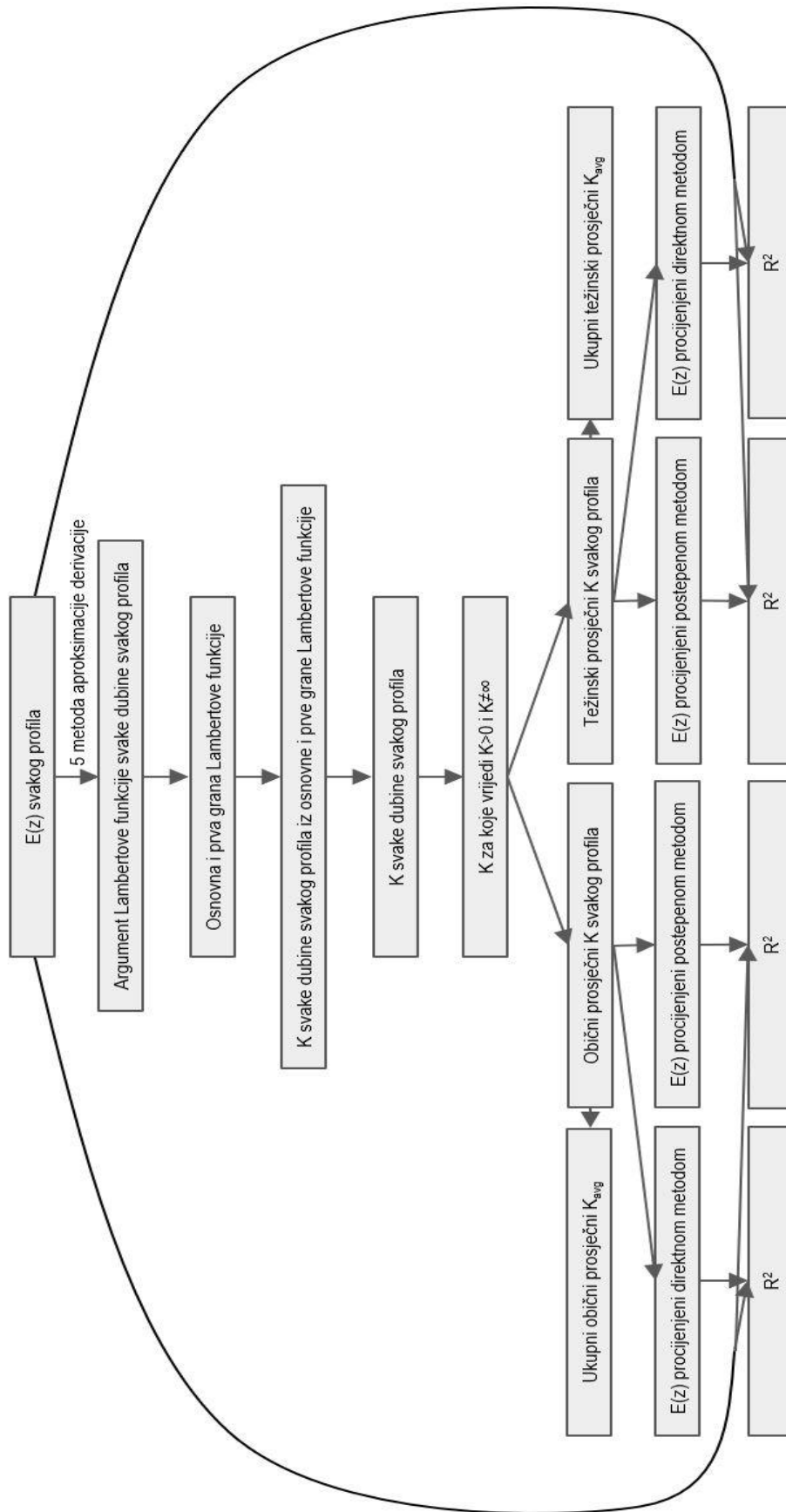




Slika 3.5 Dijagram toka koda logaritamske metode.



Slika 3.6 Dijagram toka koda derivacijske metode.



Slika 3.7 Dijagram toka koda Lambertove metode

## 4 REZULTATI I RASPRAVA

### 4.1 Analiza svih profila

Koeficijent determinacije je uzet kao glavni parametar za određivanje kvalitete promatranih metoda, čije su vrijednosti promatrane do na četvrtu decimalu. U nastavku su dani koeficijenti determinacije od najmanje do najveće vrijednosti za sve 4 metode računanja koeficijenta atenuacije s pripadnom vrijednosti običnog, odnosno težinskog prosječnog vertikalnog koeficijenta atenuacije. Koeficijenti su dani posebno za običnu direktnu i težinsku direktnu metodu.

Za običnu direktnu metodu slijedi logaritamska metoda ( $K_d(av) = 0.0429 m^{-1}, R^2 = 0.9921$ ), derivacijska metoda ( $K_d(av) = 0.0419 m^{-1}, R^2 = 0.9927$ ), Lambertova metoda ( $K_d(av) = 0.0404 m^{-1}, R^2 = 0.9942$ ) i metoda najmanjih kvadrata ( $K_d(av) = 0.0398 m^{-1}, R^2 = 0.9957$ ). Za težinsku direktnu metodu najlošija je Lambertova metoda ( ${}^wK_d(av) = 0.0410, R^2 = 0.9889$ ), dok logaritamska i derivacijska metoda ( ${}^wK_d(av) = 0.0419, R^2 = 0.9947$ ) postižu jednaki rezultat. Koeficijenti determinacije za obične postepene, odnosno težinske postepene metode su u potpunosti jednaki onima za obične direktne, odnosno težinske direktne metode.

Derivacija relativne iradijance po dubini, koja se javlja kod derivacijske i Lambertove metode, je aproksimirana metodom konačnih razlika relacijama 3.5-3.9. Aproksimacija s najvećim koeficijentom determinacije je uzeta kao reprezentativna za danu metodu. Obična direktna, odnosno obična postepena derivacijska metoda daje najbolji rezultat aproksimacijom derivacije unaprijed s greškom prvog reda, dok težinska direktna, odnosno težinska postepena derivacijska metoda daje najbolji rezultat centralnom aproksimacijom derivacije s greškom drugog reda. Obična direktna, obična postepena, težinska direktna i težinska postepena Lambertova metoda daju najbolji rezultat aproksimacijom derivacije unatrag s greškom prvog reda. Logaritamska i derivacijska metoda pokazuju bolje rezultate u kombinaciji s težinskom direktnom, odnosno težinskom postepenom metodom, dok Lambertova metoda pokazuje bolje rezultate u kombinaciji s običnom direktnom, odnosno običnom postepenom metodom. Metoda najmanjih kvadrata je upotrijebljena samo u kombinaciji s običnom

direktnom, odnosno običnom postepenom metodom, te među svim metodama postiže najveću vrijednost koeficijenta determinacije.

Vrijednosti običnog i težinskog koeficijenta atenuacije za svaku metodu, kao i njima pripadni koeficijenti determinacije za direktnu i postepenu metodu su dani u Tablici 4.1. Na grafovima 4.1, 4.2, 4.4-4.11 su za derivacijsku i Lambertovu metodu prikazani rezultati s aproksimacijom derivacije s kojom je postignut najveći koeficijent determinacije.

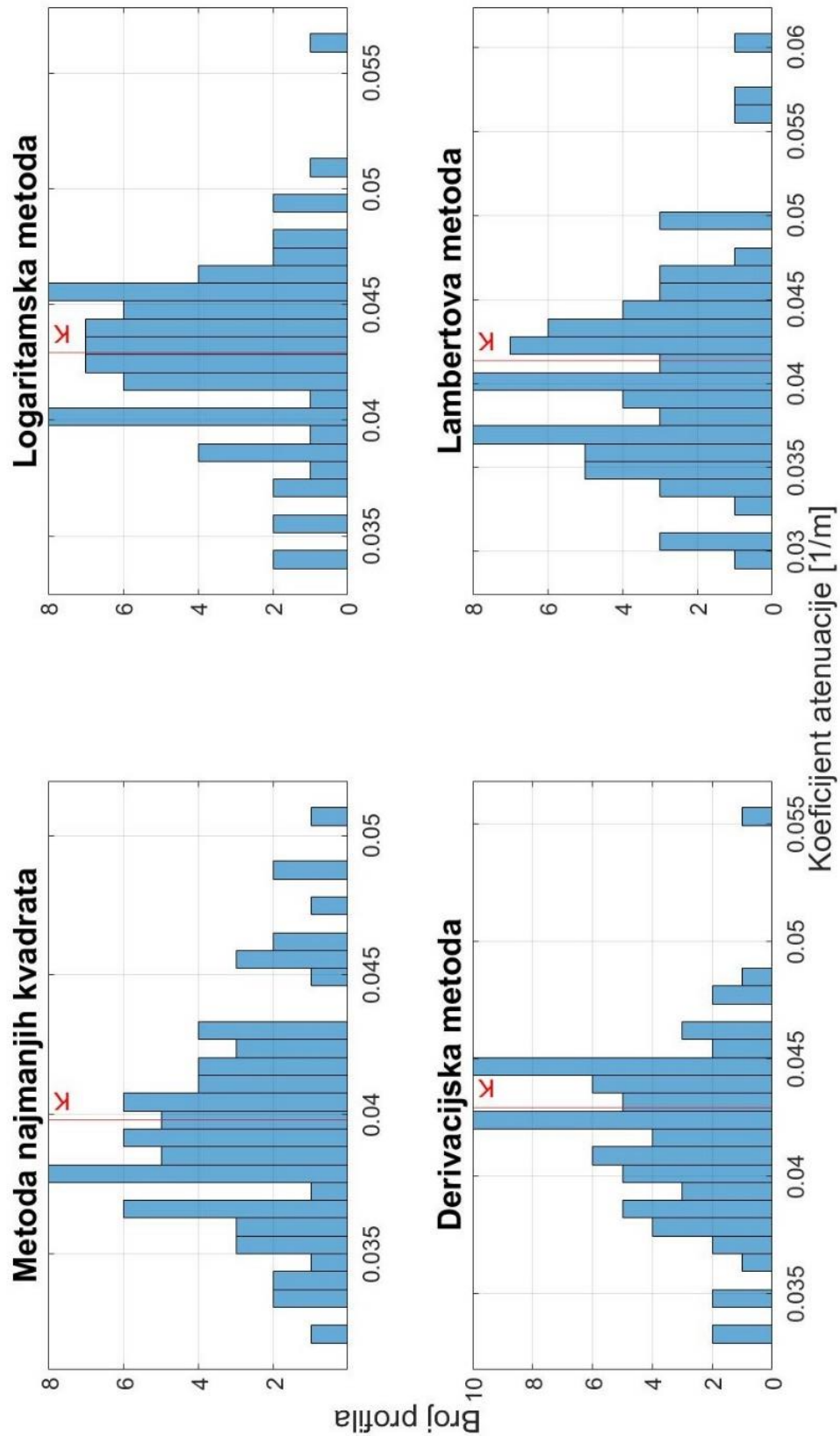
Tablica 4.1 Tablica običnih i težinskih koeficijenata atenuacije (određenih metodom najmanjih kvadrata, logaritamskom, derivacijskom i Lambertovom metodom) i njima pripadnih koeficijenata determinacije određenih direktnom i postepenom metodom.

Metoda	Red greške	Aproksimacija	$K_d(av)$ [ $m^{-1}$ ]	$R_{direktno}^2$	$R_{postepeno}^2$
Najmanjih kvadrata	/	/	0.0398	<b>0.9957</b>	<b>0.9957</b>
Logaritamska	/	/	0.0429	<b>0.9921</b>	<b>0.9921</b>
Derivacijska	1.	Unaprijed	0.0419	<b>0.9927</b>	<b>0.9927</b>
		Unatrag	0.0441	0.9910	0.9910
	2.	Centralna	0.0429	0.9921	0.9921
		Unaprijed	0.0438	0.9912	0.9912
		Unatrag	0.0439	0.9911	0.9911
Lambertova	1.	Unaprijed	0.0424	0.9909	0.9909
		Unatrag	0.0404	<b>0.9942</b>	<b>0.9942</b>
	2.	Centralna	0.0414	0.9941	0.9941
		Unaprijed	0.0439	0.9881	0.9881
		Unatrag	0.0434	0.9875	0.9875
Metoda	Red greške	Aproksimacija	${}^wK_d(av)$ [ $m^{-1}$ ]	$R_{direktno}^2$	$R_{postepeno}^2$
Najmanjih kvadrata	/	/	/	/	/
Logaritamska	/	/	0.0419	<b>0.9947</b>	<b>0.9947</b>
Derivacijska	1.	Unaprijed	0.0413	0.9946	0.9946
		Unatrag	0.0431	0.9937	0.9937
	2.	Centralna	0.0419	<b>0.9947</b>	<b>0.9947</b>
		Unaprijed	0.0445	0.9913	0.9913
		Unatrag	0.0451	0.9908	0.9908
Lambertova	1.	Unaprijed	0.0466	0.9746	0.9746
		Unatrag	0.0410	<b>0.9889</b>	<b>0.9889</b>
	2.	Centralna	0.0427	0.9885	0.9885
		Unaprijed	0.0501	0.9706	0.9706
		Unatrag	0.0505	0.9633	0.9633

Obični prosječni vertikalni koeficijenti atenuacije 74 profila dolje usmjerene iradijance za metodu najmanjih kvadrata poprimaju vrijednosti od  $0.0321 \text{ m}^{-1}$  do  $0.0508 \text{ m}^{-1}$ , za logaritamsku metodu od  $0.0339 \text{ m}^{-1}$  do  $0.0566 \text{ m}^{-1}$ , za derivacijsku metodu s aproksimacijom derivacije unaprijed uz grešku prvog reda od  $0.0332 \text{ m}^{-1}$  do  $0.0555 \text{ m}^{-1}$  i Lambertovu metodu s aproksimacijom derivacije unatrag uz grešku prvog reda od  $0.0297 \text{ m}^{-1}$  do  $0.0606 \text{ m}^{-1}$ .

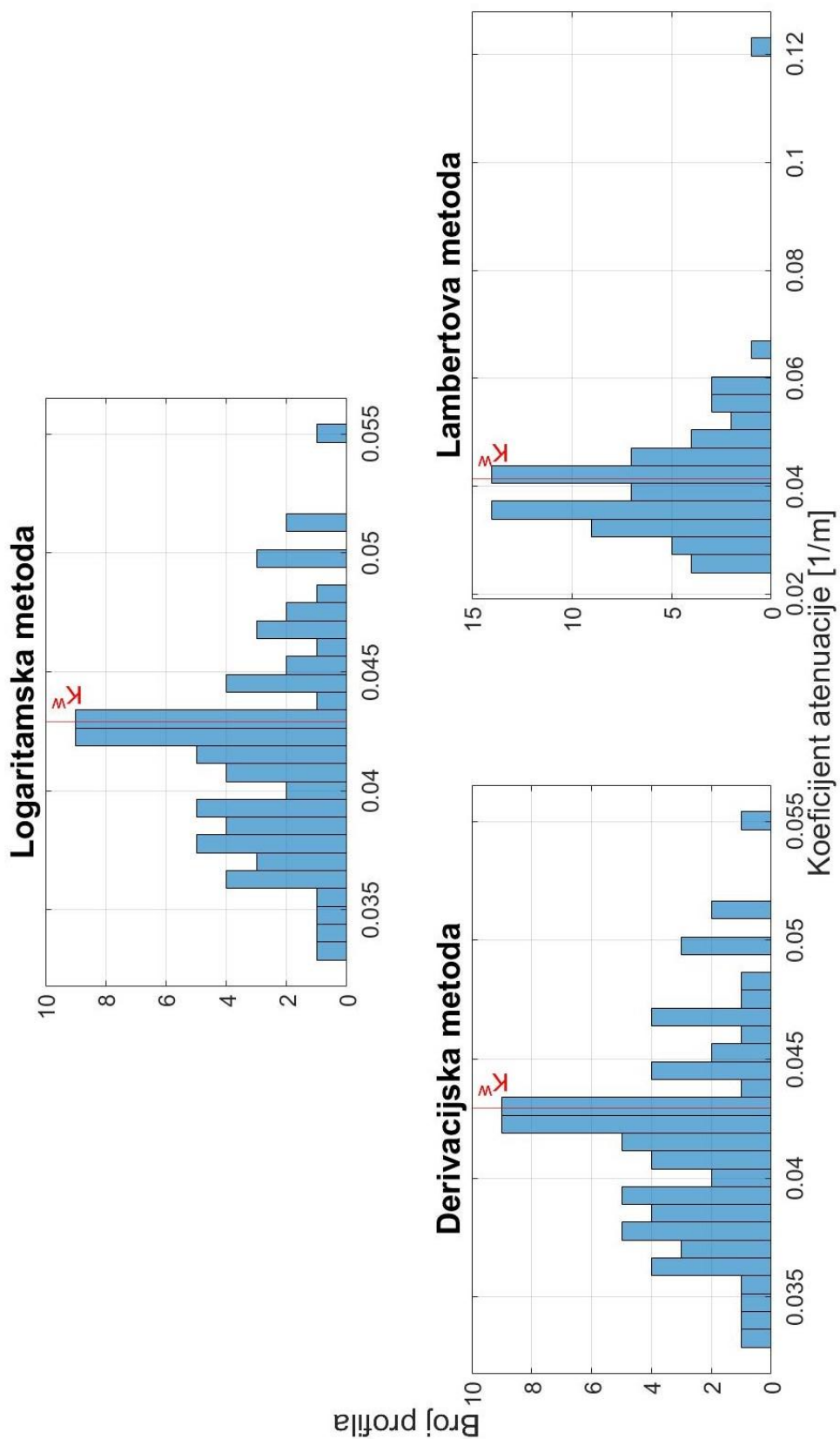
Težinski prosječni vertikalnih koeficijenti atenuacije 74 profila dolje usmjerene iradijance za logaritamsku metodu poprimaju vrijednosti od  $0.0335 \text{ m}^{-1}$  do  $0.0552 \text{ m}^{-1}$ , za derivacijsku metodu s centralnom aproksimacijom derivacije uz grešku drugog reda od  $0.0335 \text{ m}^{-1}$  do  $0.0553 \text{ m}^{-1}$  i Lambertovu metodu s aproksimacijom derivacije unatrag uz grešku prvog reda od  $0.0252 \text{ m}^{-1}$  do  $0.1209 \text{ m}^{-1}$ .

Raspodjela vrijednosti koeficijenata prati približno normalnu raspodjelu kako je i vidljivo na histogramu na slici 4.1, odnosno 4.2. Na histogramima su također ucrtani ukupni obični prosječni, odnosno ukupni težinski prosječni vertikalni koeficijent atenuacije dolje usmjerene iradijance za sva 74 profila.



Slika 4.1 Histogram običnih prosječnih vertikalnih koeficijenata atenuacije svih profila po metodama. Linija K označava vrijednost ukupnog običnog prosječnog koeficijenta.



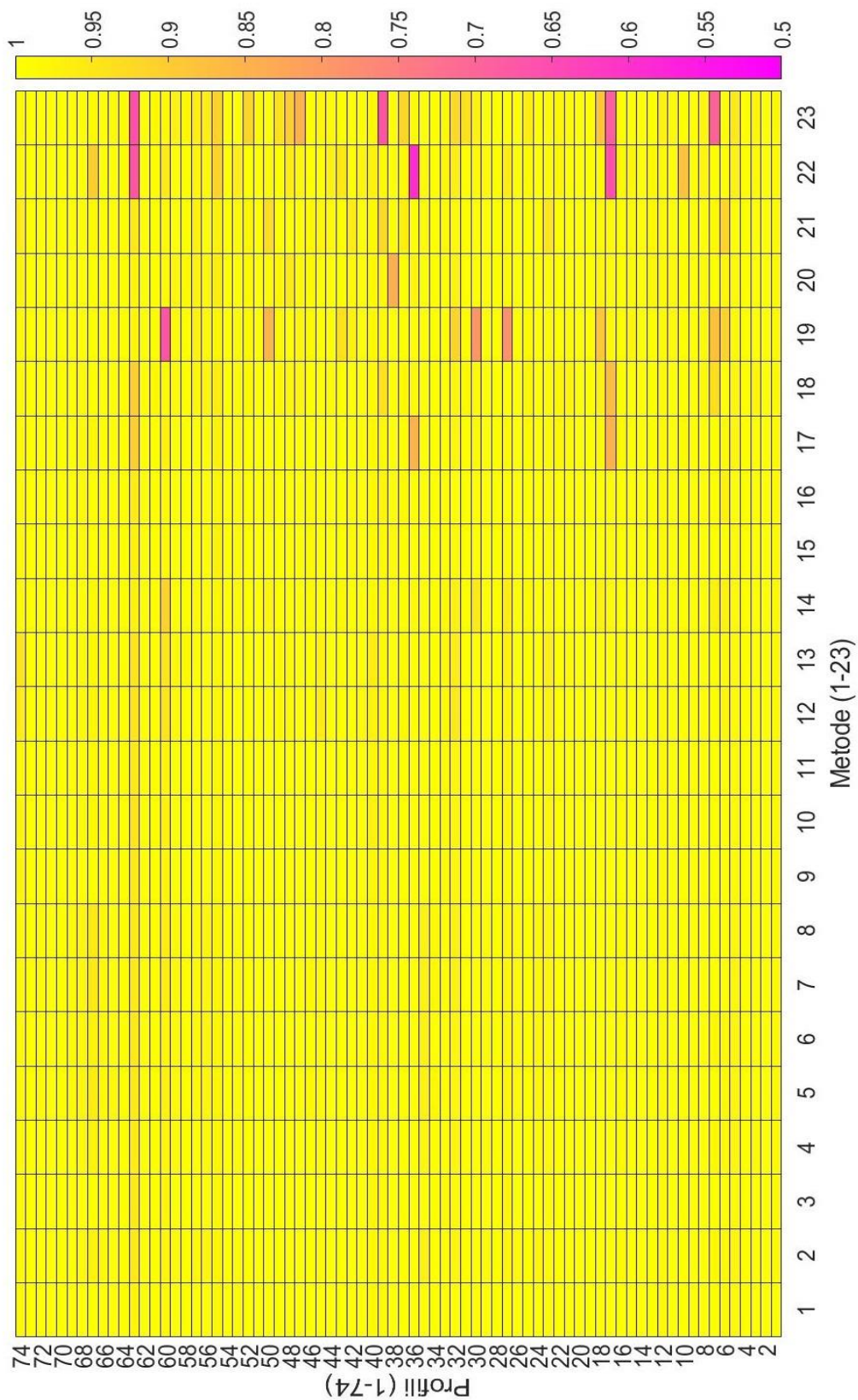


Slika 4.2 Histogram težinskih prosječnih vertikalnih koeficijenata atenuacije svih profila po metodama. Linija  $K^w$  označava vrijednost ukupnog težinskog prosječnog koeficijenta.

Na slici 4.3 je dan grafički prikaz vrijednosti koeficijenta determinacije za svaki od 74 profila za sve primijenjene direktne, odnosno postepene metode: obična metoda najmanjih kvadrata (1), obična (2), odnosno težinska (3) logaritamska metoda, obična (4-8), odnosno težinska (9-13) derivacijska metoda za svaku od 5 upotrijebljenih metoda procjene derivacije, te obična (14-18), odnosno težinska (19-23) Lambertova metoda za svaku od 5 upotrijebljenih metoda procjene derivacije.

Metode aproksimacije derivacije upotrijebljene kod derivacijske i Lambertove metode su redom: aproksimacija derivacije unaprijed s greškom prvog reda, aproksimacija derivacije unazad s greškom prvog reda, centralna aproksimacija derivacije s greškom drugog reda, aproksimacija derivacije unaprijed s greškom drugog reda, te aproksimacija derivacije unazad s greškom drugog reda.

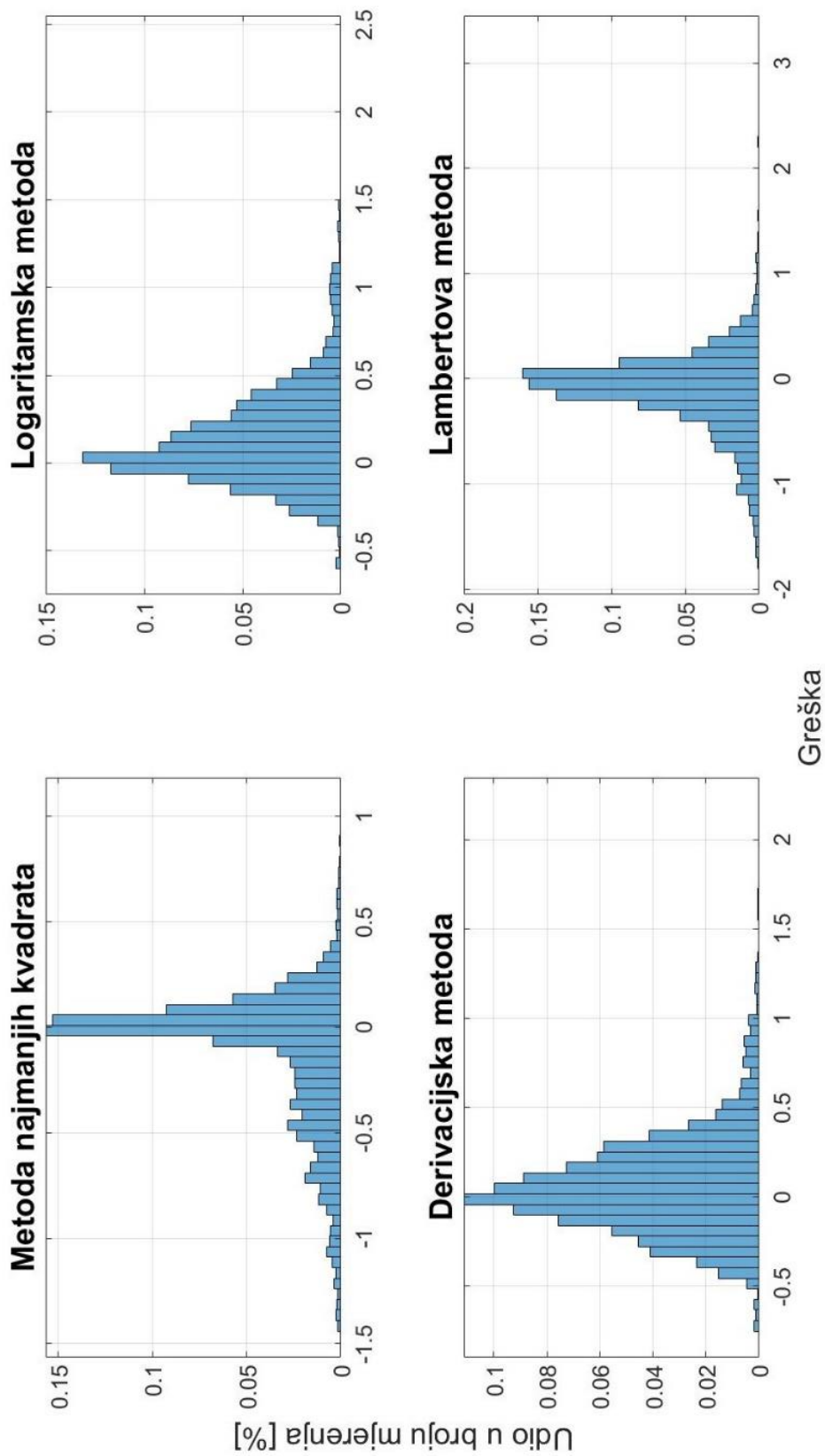
S obzirom da su koeficijenti determinacije za obične postepene, odnosno težinske postepene metode u potpunosti jednaki onima za obične direktne, odnosno težinske direktne metode slika 4.3 je istovremeno prikaz stanja za direktne i težinske metode.



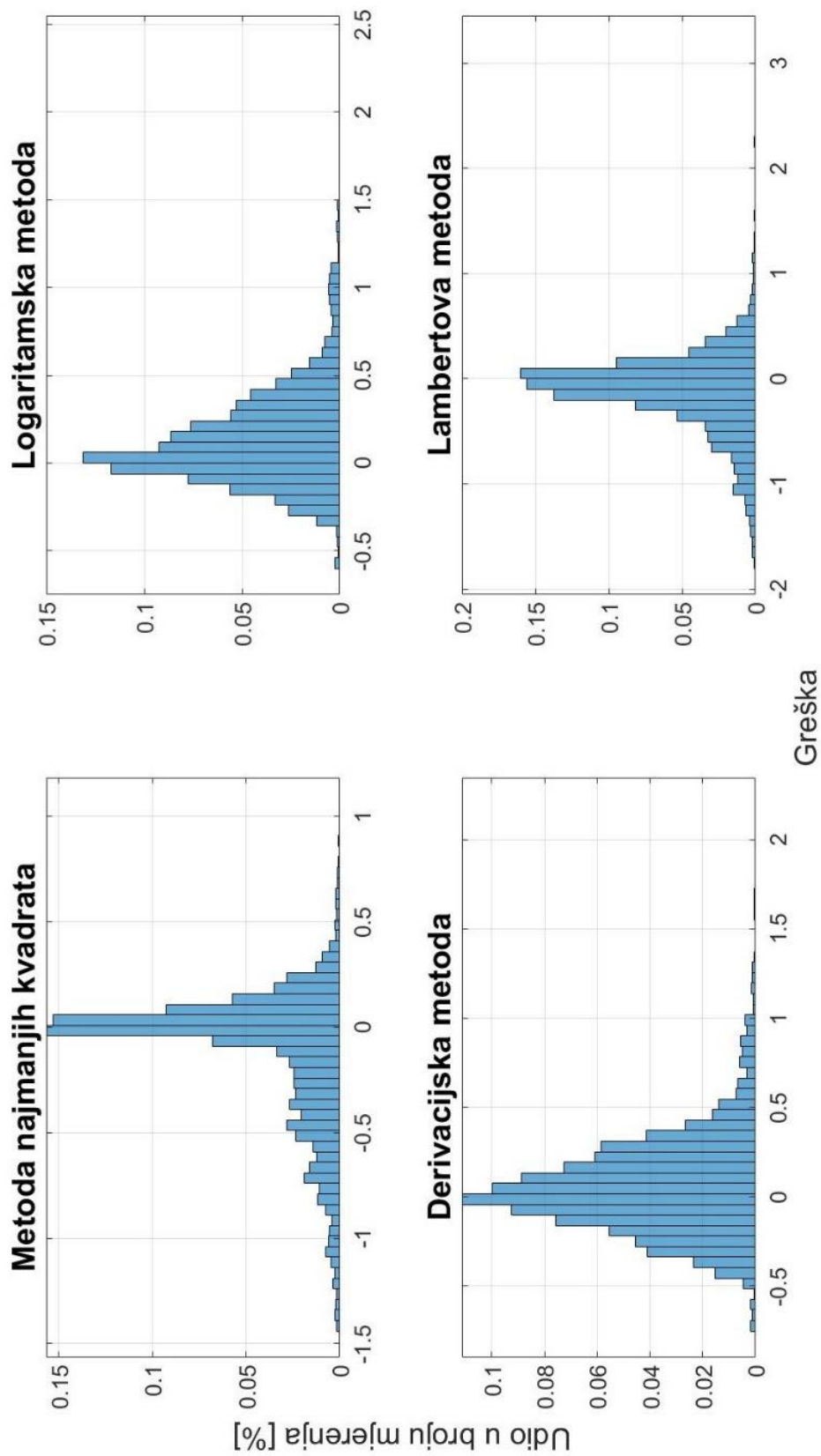
Slika 4.3 Koeficijent determinacije za sva 74 profila za sve upotrijebljene direktne, odnosno postepene metode.

Histogram greške za metodu najmanjih kvadrata, logaritamsku, derivacijsku i Lambertovu metodu je za običnu direktnu metodu dan na slici 4.4, za direktnu postepenu metodu na slici 4.5, za težinsku direktnu metodu na slici 4.6, te za težinsku postepenu metodu na slici 4.7. Greška je definirana kao razlika između logaritamske vrijednosti izmjerene relativne iradijance i logaritamske vrijednosti procijenjene relativne iradijance. Pri uspoređivanju pojedinačnih grafova na slikama 4.4-4.7 treba imati na umu da vrijednosti greške na x-osi nisu svugdje jednake. Histogrami greške svih metoda očekivano prate normalnu raspodjelu. Maksimalne vrijednosti greške su najmanje za običnu direktnu, odnosno običnu postepenu logaritamsku i derivacijsku metodu. Lambertove metode u svim slučajevima postižu maksimalnu vrijednost normalne raspodjele, ali i maksimalnu vrijednost greške. Maksimalna vrijednost greške je najveća za težinsku direktnu, odnosno težinsku postepenu Lambertovu metodu. Dok histogrami greške za sve metode prate normalnu raspodjelu odstupanje je najizraženije za metodu najmanjih kvadrata koja češće precjenjuje, nego što podcjenjuje vrijednost relativne iradijance.

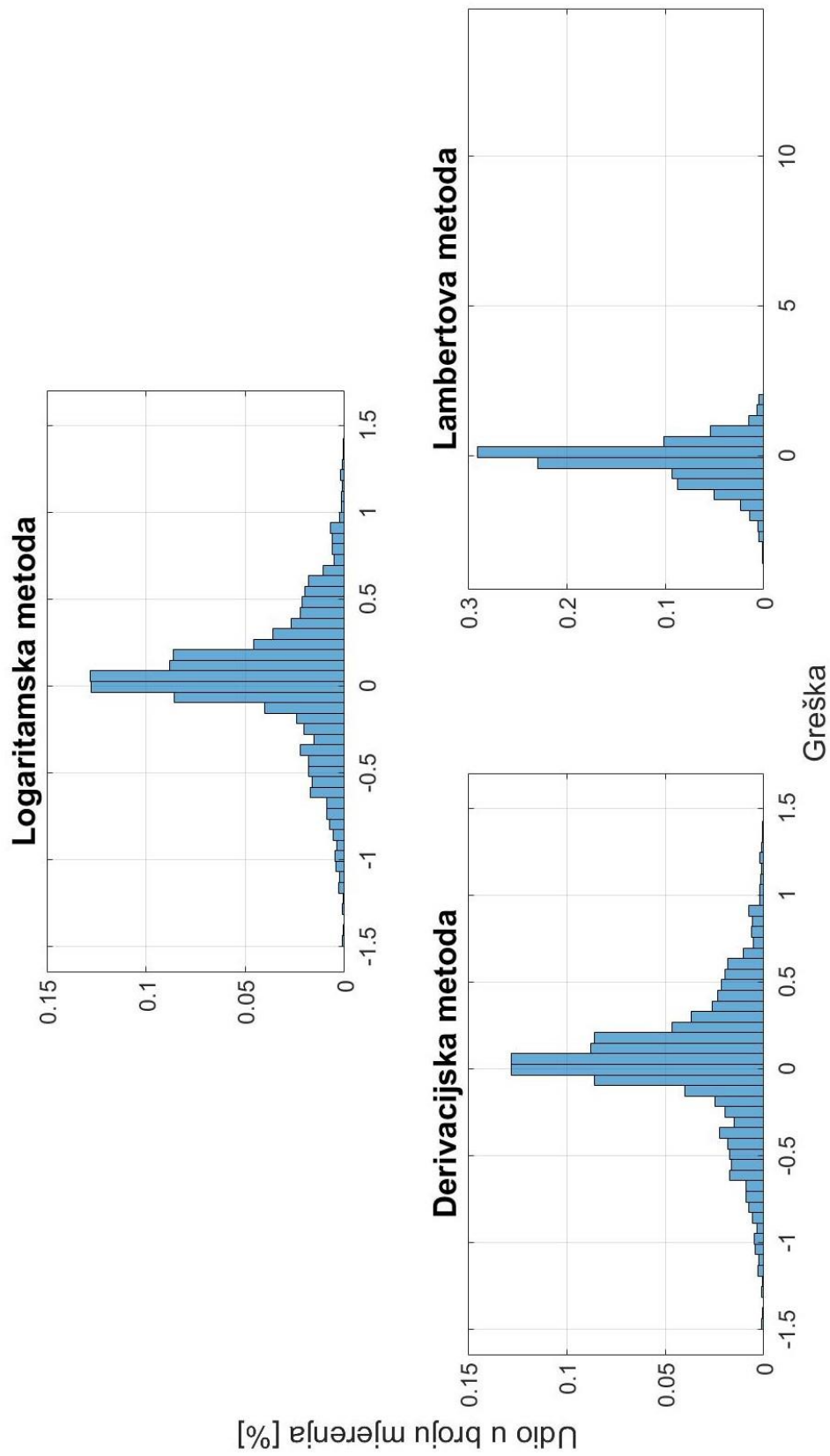
Odnos između logaritamske vrijednosti izmjerene relativne iradijance i logaritamske vrijednosti relativne iradijance procijenjene metodom najmanjih kvadrata, logaritamskom, derivacijskom i Lambertovom metodom je za običnu direktnu metodu dan na slici 4.8, za direktnu postepenu metodu na slici 4.9, za težinsku direktnu metodu na slici 4.10, te za težinsku postepenu metodu na slici 4.11. Metoda najmanjih kvadrata nije upotrijebljena u kombinaciji s težinskom direktnom i težinskom postepenom metodom.



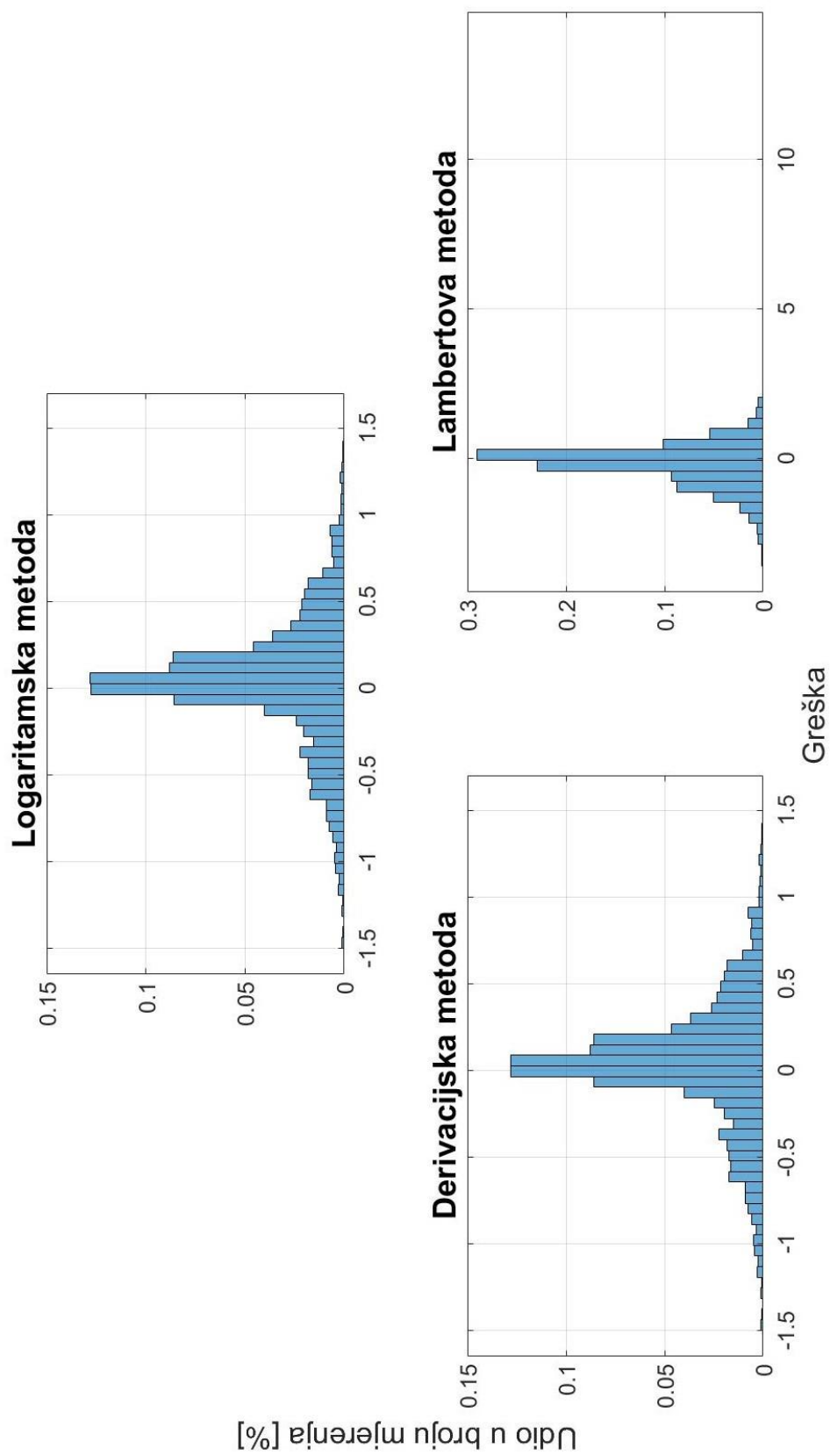
Slika 4.4 Histogram grešaka svih profila svih metoda za običnu direktnu metodu.



Slika 4.5 Histogram grešaka svih profila svih metoda za običnu postepenu metodu.

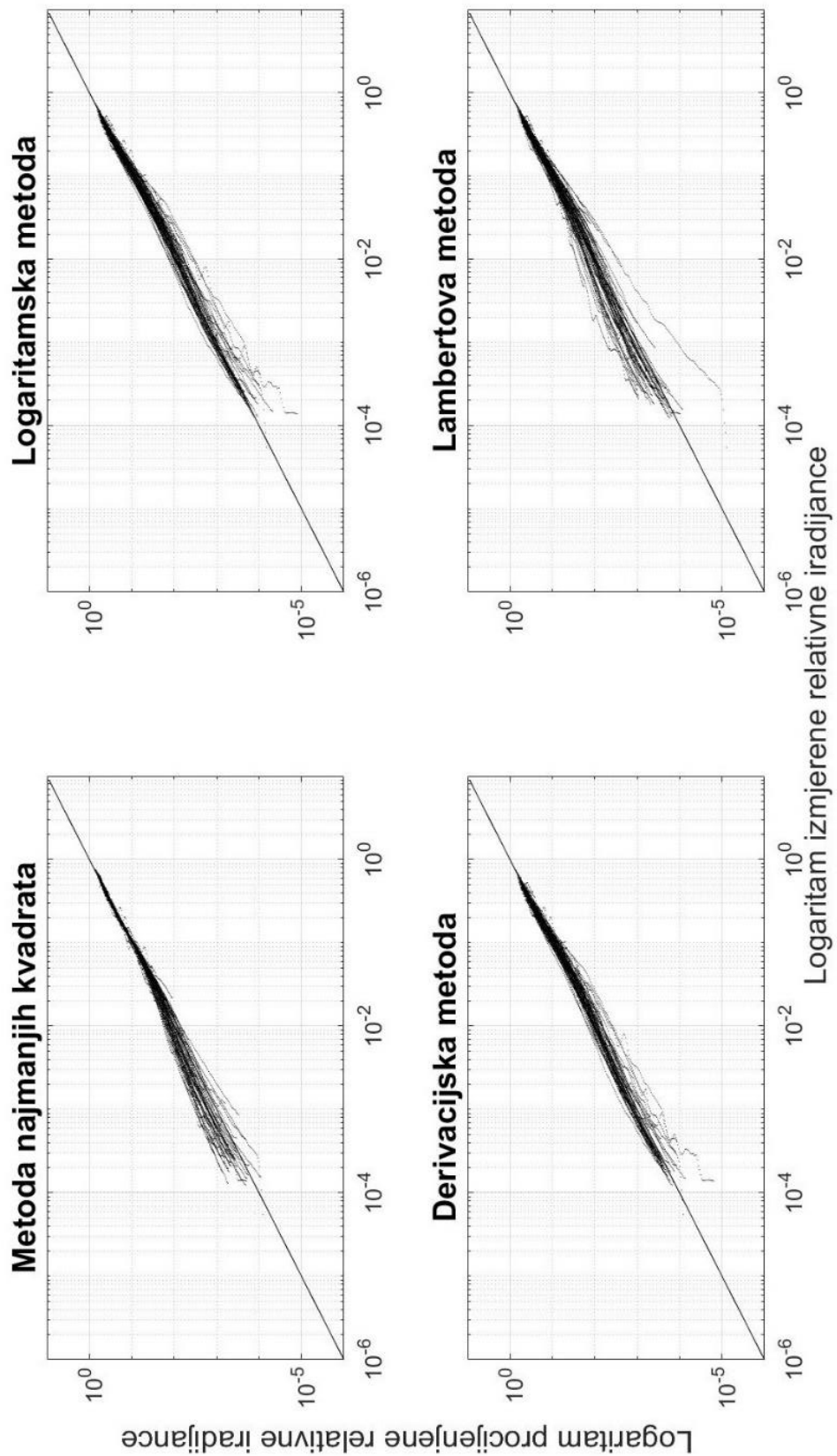


Slika 4.6 Histogram grešaka svih profila svih metoda za težinsku direktnu metodu.

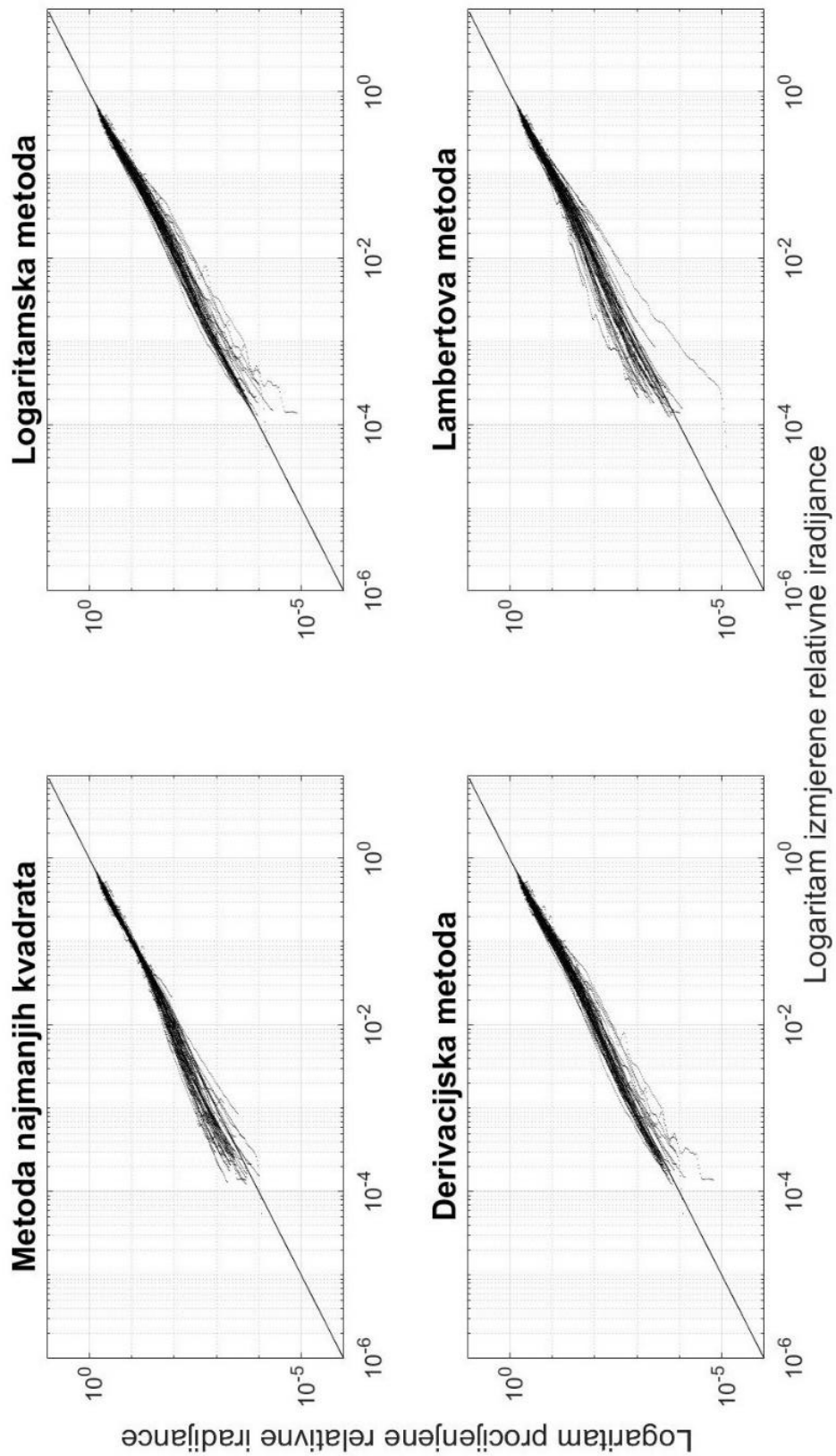


Slika 4.7 Histogram grešaka svih profila svih metoda za težinsku postepenu metodu.

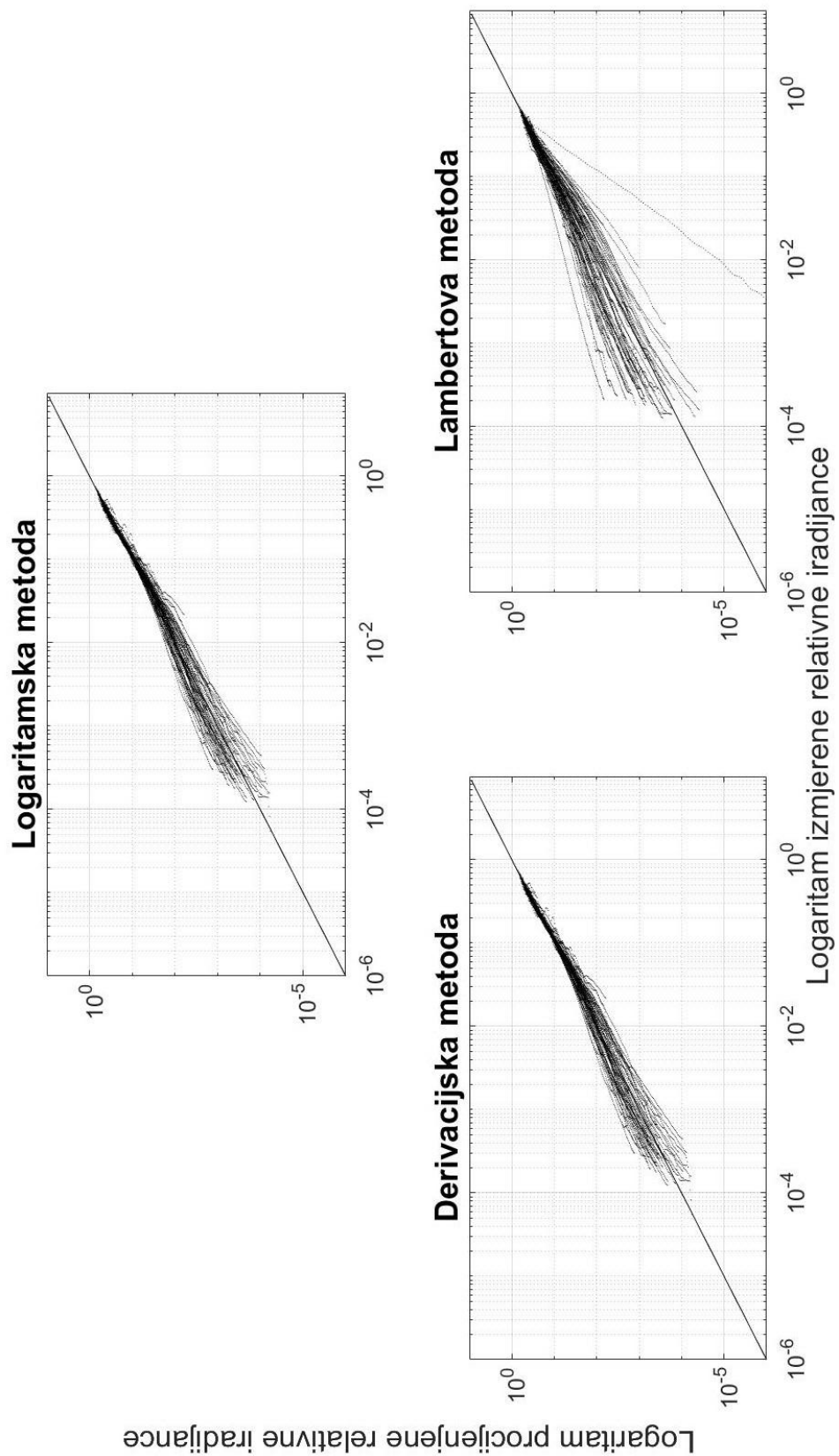




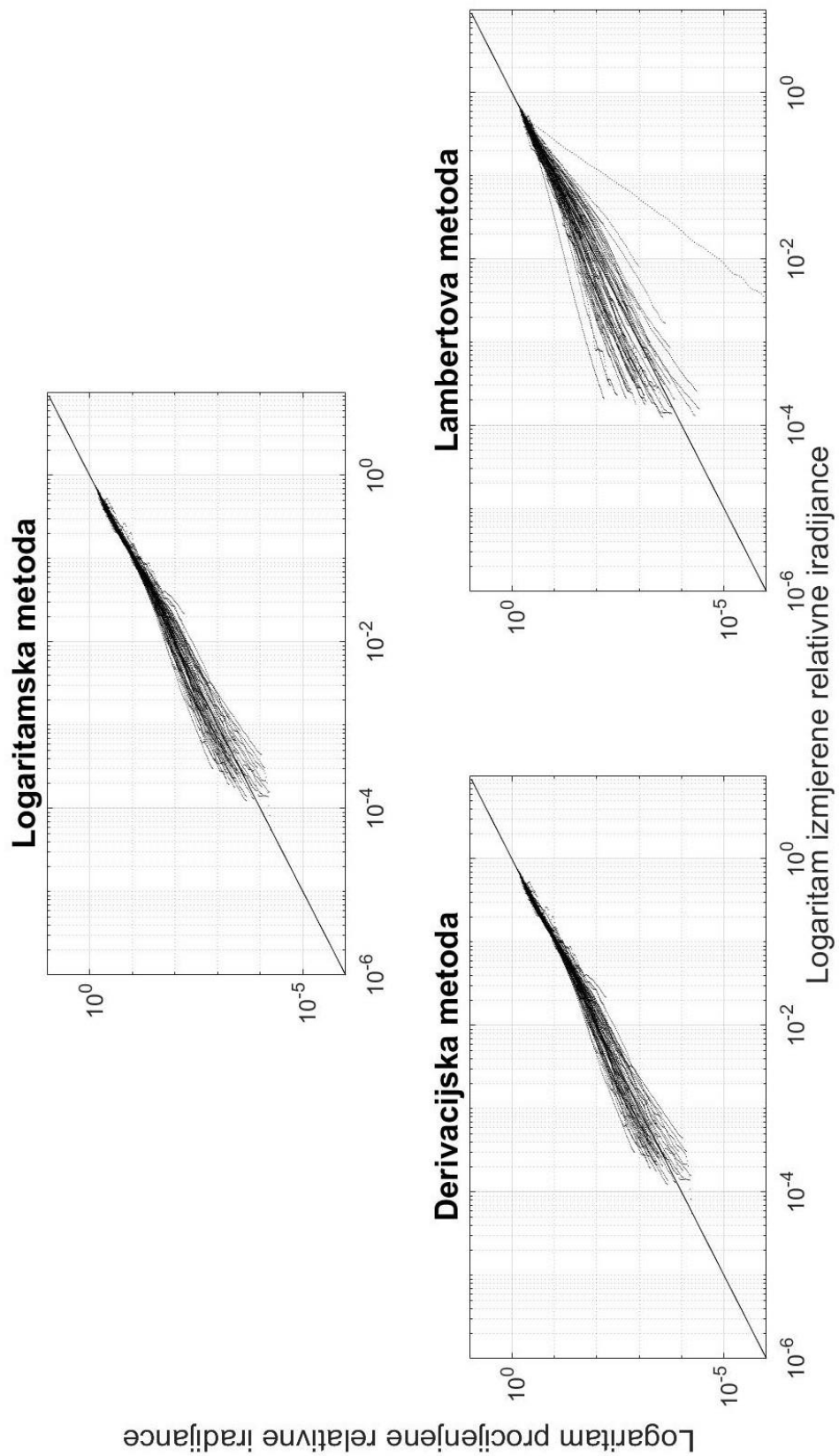
Slika 4.8 Odnos između logaritma izmjerenih profila i logaritma profila procijenjenih svim metodama za običnu direktnu metodu.



Slika 4.9 Odnos između logaritma izmjerenih profila i logaritma profila procijenjenih svim metodama za običnu postepenu metodu.



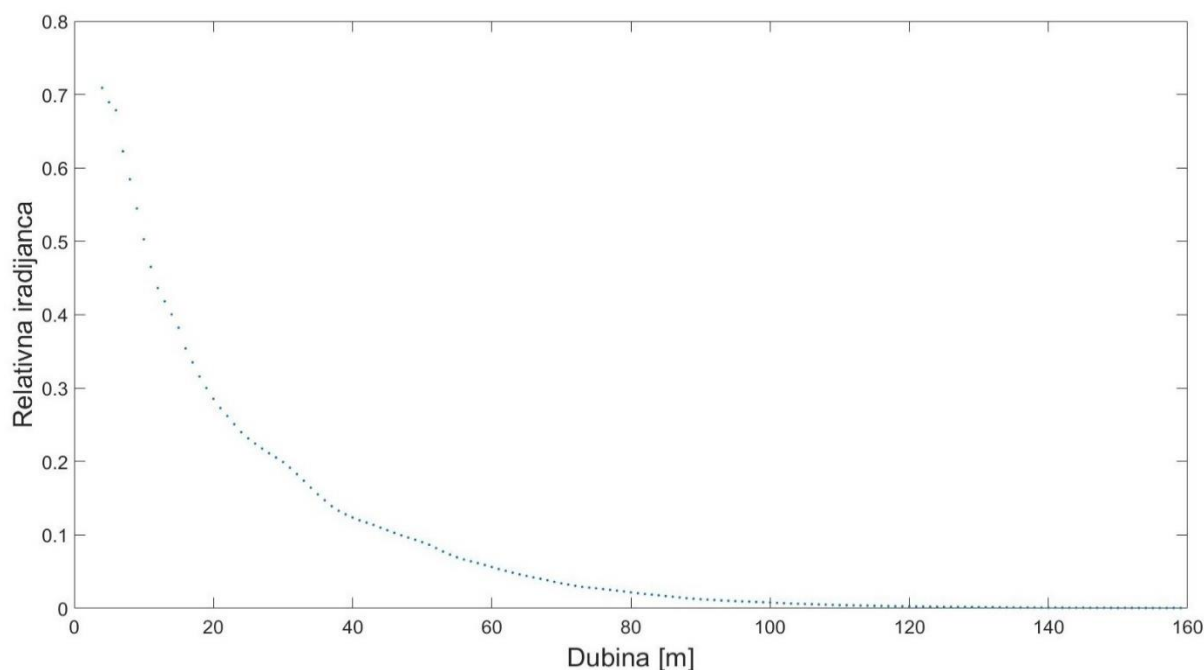
Slika 4.10 Odnos između logaritma izmjerenih profila i logaritma profila procijenjenih svim metodama za težinsku direktnu metodu.



Slika 4.11 Odnos između logaritma izmjerenih profila i logaritma profila procijenjenih svim metodama za težinsku postepenu metodu.

## 4.2 Analiza pojedinačnog profila

Za jedan od 74 profila je provedena ekvivalentna analiza. Slučajnim odabirom je izabran profil s rednim brojem 10. Profil se sastoji od ukupno 124 mjerenja relativne dolje usmjerene iradijance raspoređenih u razmaku od jednog metra na intervalu dubine od 3 do 126 metara. Na slici 5.1 je prikazana ovisnost relativne dolje usmjerene iradijance o dubini profila s rednim brojem 10.



Slika 4.12 Ovisnost relativne dolje usmjerene iradijance o dubini za profil s rednim brojem 10.

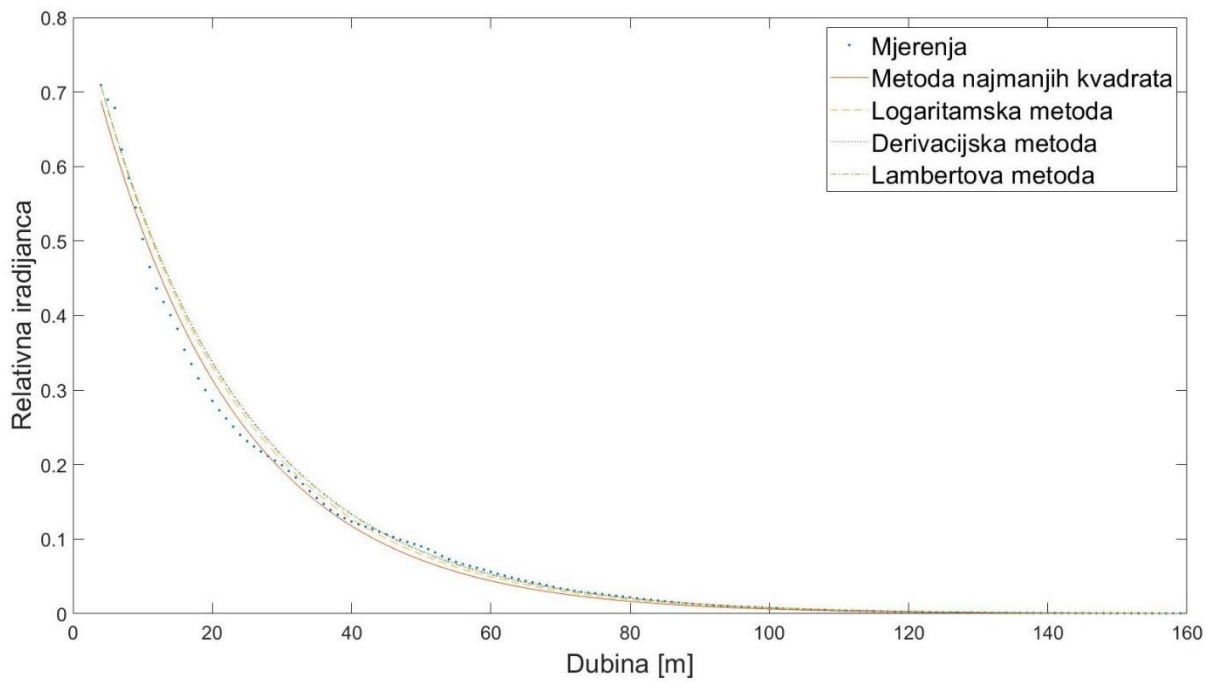
Na slici 4.12 je vidljivo da je maksimalna vrijednost relativne dolje usmjerene iradijance približno jednaka 0.7, a ne 1. Treba primijetiti kako je to vrijednost na dubini 3 metra, što znači da je već došlo do određenog gušenja svjetlosti. Nadalje, mjerenja površinske dolje usmjerene iradijance su prikupljena na brodu, izvan mora, dok su mjerenja podvodne dolje usmjerene iradijance prikupljena u moru. S obzirom da su zrak i more dva optička medija različitog optičkog indeksa, pri prijelazu svjetlosti iz zraka u more, osim refrakcije, dolazi i do refleksije. Dio iradijance izmjerene na površini je na granici zrak-more reflektiran nazad u atmosferu.

Tablica 4.2 Tablica običnih i težinskih prosječnih koeficijenata atenuacije (određenih metodom najmanjih kvadrata, logaritamskom, derivacijskom i Lambertovom metodom) i njima pripadnih koeficijenata determinacije određenih direktnom i postepenom metodom za profil s rednim brojem 10.

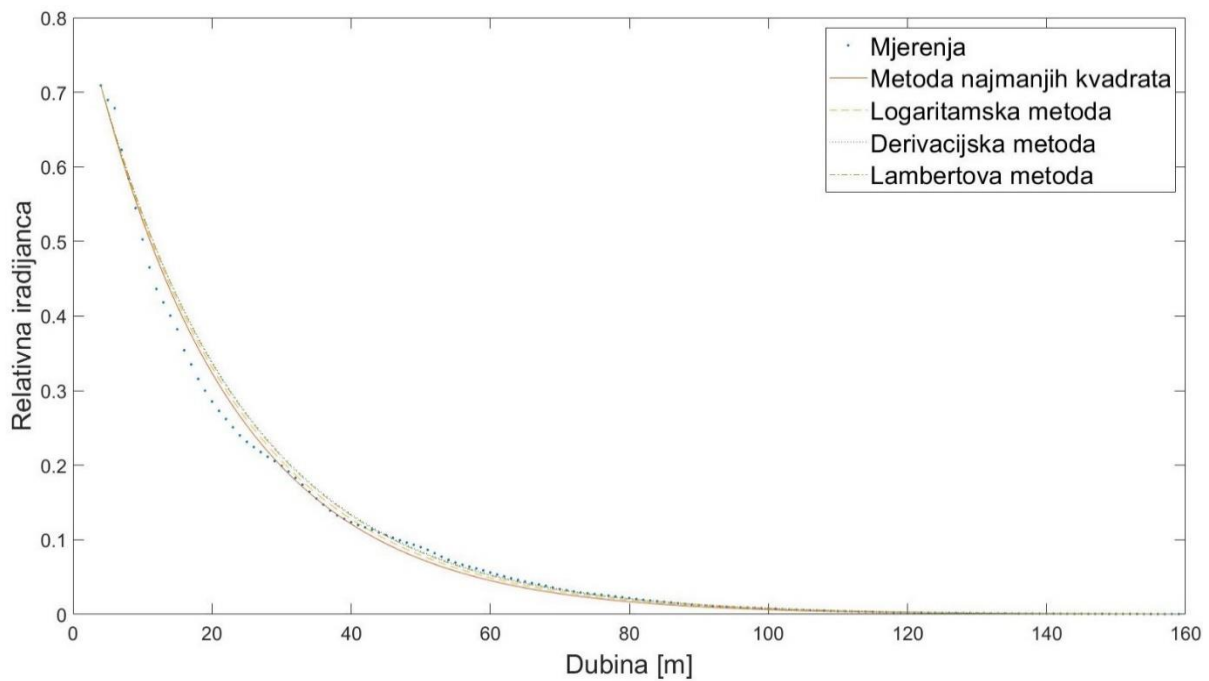
Metoda	Red greške	Aproksimacija	$K_d(av)$ [ $m^{-1}$ ]	$R^2_{direktno}$	$R^2_{postepeno}$
Najmanjih kvadrata	/	/	0.0490	<b>0.9946</b>	0.9946
Logaritamska	/	/	0.0476	<b>0.9941</b>	0.9941
Derivacijska	1.	Unaprijed	0.0462	0.9932	0.9932
		Unatrag	0.0486	<b>0.9945</b>	<b>0.9945</b>
	2.	Centralna	0.0476	0.9941	0.9941
		Unaprijed	0.0481	0.9943	0.9943
		Unatrag	0.0477	0.9941	0.9941
Lambertova	1.	Unaprijed	0.0468	0.9936	0.9936
		Unatrag	0.0465	0.9934	0.9934
	2.	Centralna	0.0469	0.9937	0.9937
		Unaprijed	0.0616	0.9870	0.9870
		Unatrag	0.0477	<b>0.9941</b>	<b>0.9941</b>
Metoda	Red greške	Aproksimacija	${}^wK_d(av)$ [ $m^{-1}$ ]	$R^2_{direktno}$	$R^2_{postepeno}$
Najmanjih kvadrata	/	/	/	/	/
Logaritamska	/	/	0.0499	<b>0.9947</b>	<b>0.9947</b>
Derivacijska	1.	Unaprijed	0.0481	0.9943	0.9943
		Unatrag	0.0506	<b>0.9948</b>	<b>0.9948</b>
	2.	Centralna	0.0499	0.9947	0.9947
		Unaprijed	0.0520	0.9946	0.9946
		Unatrag	0.0510	0.9947	0.9947
Lambertova	1.	Unaprijed	0.0478	0.9942	0.9942
		Unatrag	0.0483	0.9944	0.9944
	2.	Centralna	0.0496	<b>0.9947</b>	<b>0.9947</b>
		Unaprijed	0.1092	0.8817	0.8817
		Unatrag	0.0542	0.9938	0.9938

Relacijama 3.2-3.4, odnosno logaritamskom, derivacijskom i Lambertovom metodom je procijenjena vrijednost vertikalnog koeficijenta atenuacije dolje usmjerene iradijance pri svakoj od 124 dubine. Relacijom 3.10 je određen obični, a relacijom 3.11 težinski prosječni vertikalni koeficijent dolje usmjerene iradijance za koje je relacijama 3.14 i 3.15 procijenjen profil direktnom metodom, a relacijama 3.16 i 3.17 postepenom metodom. Metodom najmanjih kvadrata je također procijenjen obični prosječni koeficijent atenuacije dolje usmjerene iradijance za koji je direktnom i postepenom metodom procijenjen profil. Koeficijenti atenuacije i njima pripadni koeficijenti determinacije su dani u Tablici 4.2.

U nastavku su na grafovima 4.13-4.16 dani prikazi izmjerenih i procijenjenih vrijednosti profila s rednim brojem 10., a na grafovima 4.17 i 4.18 prikazi izmjerenih i procijenjenih vrijednosti profila s rednim brojem 10. za svaku vrstu procjene derivacije za običnu i težinsku direktnu Lambertovu metodu. Nisu dani grafovi za postepenu metodu, s obzirom da su koeficijenti determinacije za direktnu i postepenu metodu jednaki. Na slici 4.13 je za običnu direktnu, odnosno na slici 4.14 za običnu postepenu, derivacijsku metodu derivacija procijenjena aproksimacijom unaprijed s greškom prvog reda. Na slici 4.15 je za težinsku direktnu, odnosno na slici 4.16 za težinsku postepenu, derivacijsku metodu derivacija procijenjena centralnom aproksimacijom s greškom drugog reda. Za običnu direktnu, običnu postepenu, težinsku direktnu i težinsku postepenu Lambertovu metodu na slikama 4.13-4.16 derivacija je procijenjena aproksimacijom unatrag s greškom prvog reda.

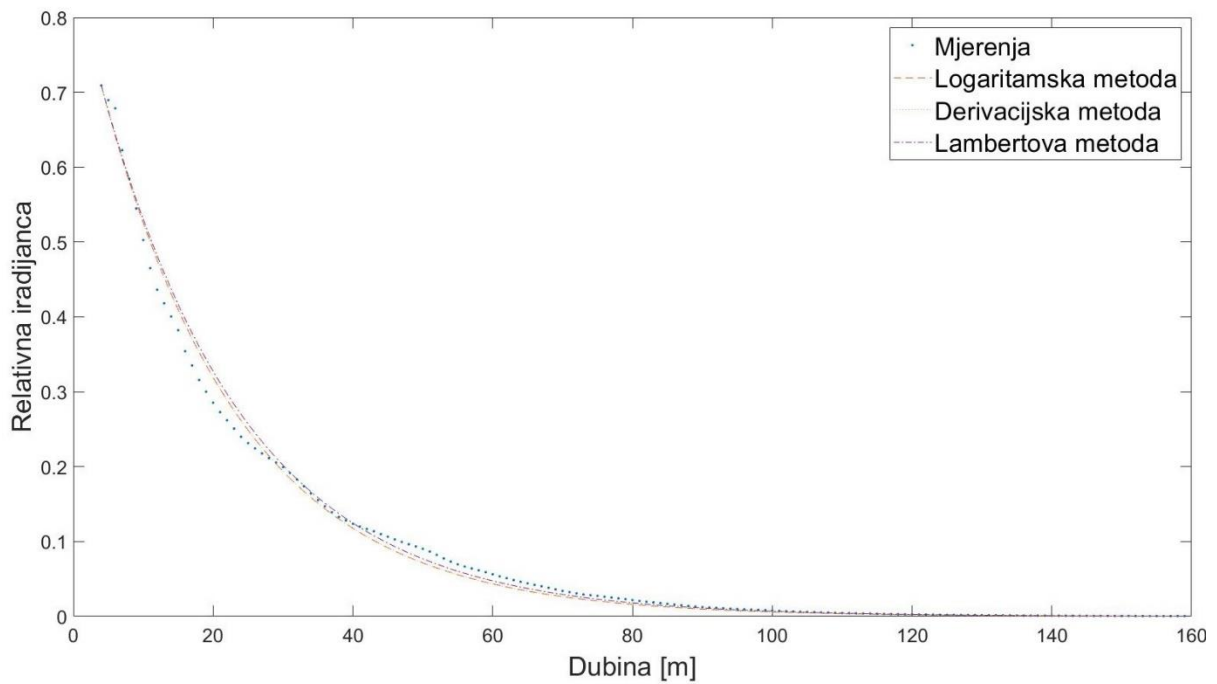


Slika 4.13 Izmjerena i procijenjena vrijednost 10. profila za običnu direktnu metodu.

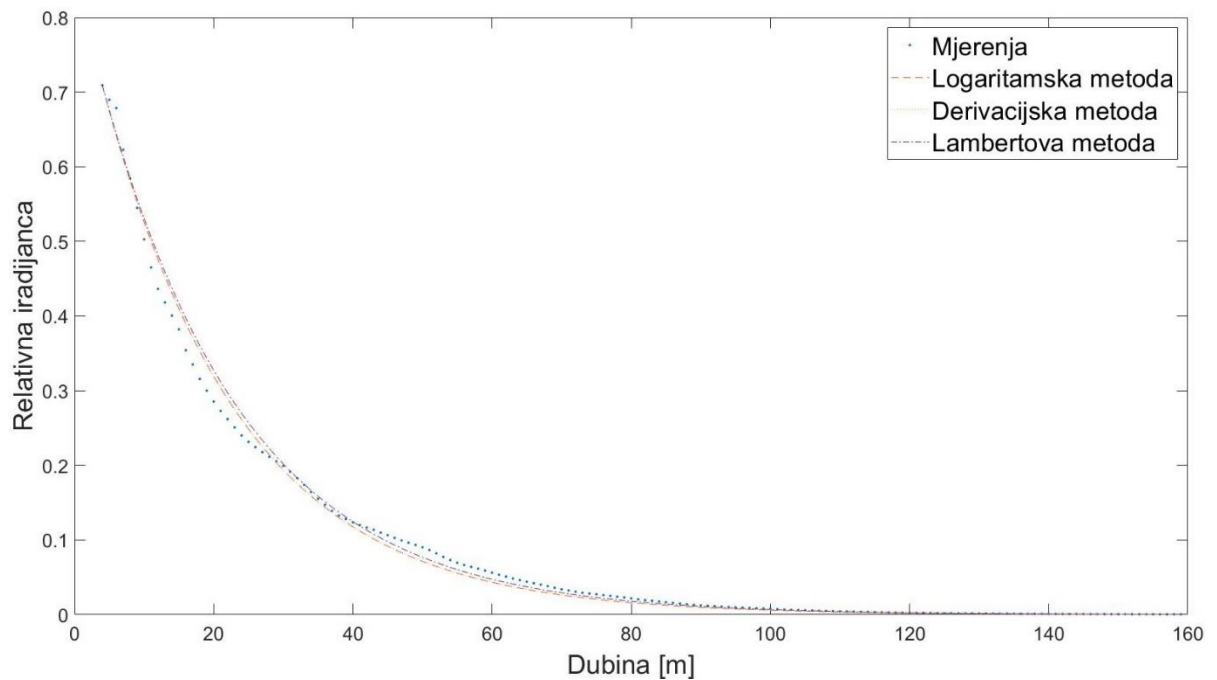


Slika 4.14 Izmjerena i procijenjena vrijednost 10. profila za običnu postepenu metodu.

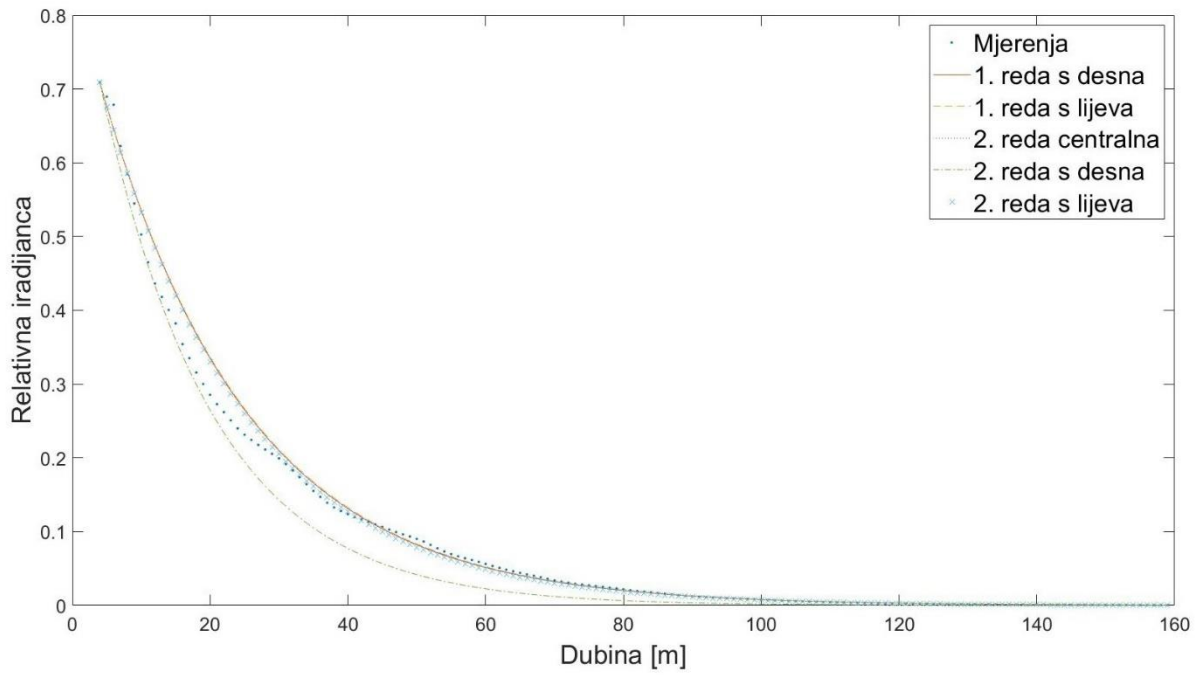




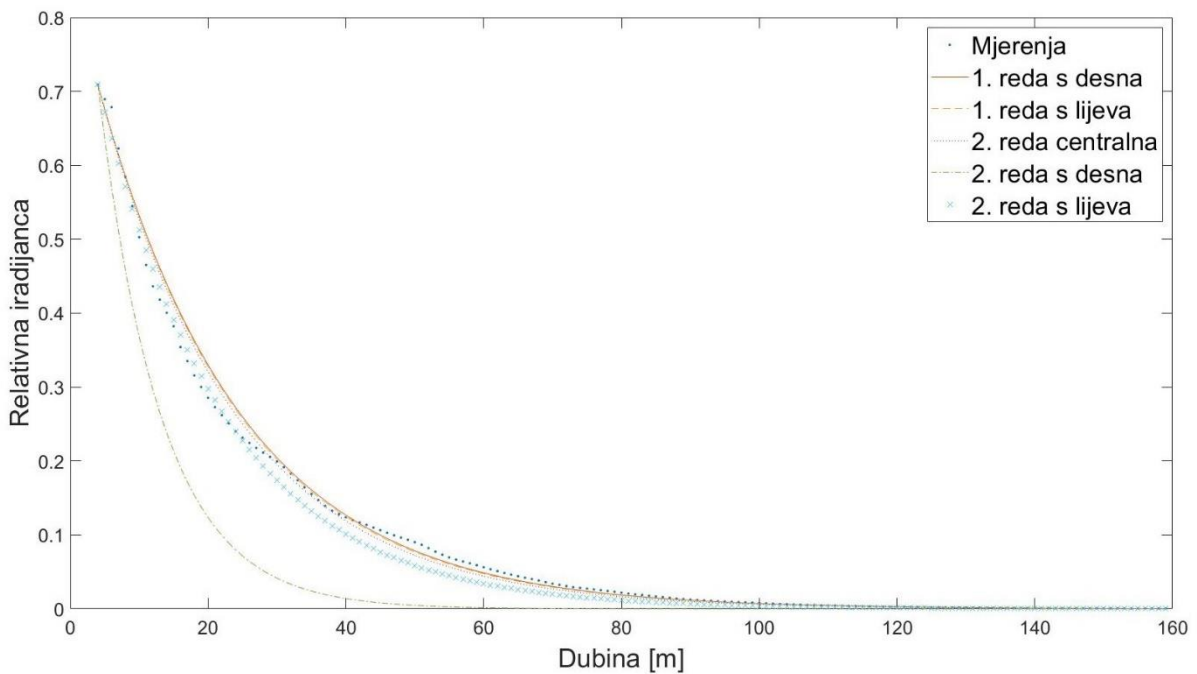
Slika 4.15 Izmjerena i procijenjena vrijednost 10. profila za težinsku direktnu metodu.



Slika 4.16 Izmjerena i procijenjena vrijednost 10. profila za težinsku postepenu metodu.



Slika 4.17 Izmjerena i procijenjena vrijednost 10. profila za svaku vrstu procjene derivacije za običnu direktnu Lambertovu metodu.



Slika 4.18 Izmjerena i procijenjena vrijednost 10. profila za svaku vrstu procjene derivacije za težinsku direktnu Lambertovu metodu.

## 5 ZAKLJUČAK

Za običnu direktnu metodu najmanji koeficijent determinacije je postignut logaritamskom metodom ( $K_d(av) = 0.0429 m^{-1}, R^2 = 0.9921$ ), zatim derivacijskom metodom ( $K_d(av) = 0.0419 m^{-1}, R^2 = 0.9927$ ), pa Lambertovom metodom ( $K_d(av) = 0.0404 m^{-1}, R^2 = 0.9942$ ), a najveći koeficijent determinacije je postignut metodom najmanjih kvadrata ( $K_d(av) = 0.0398 m^{-1}, R^2 = 0.9957$ ). Za težinsku direktnu metodu najmanja vrijednost je postignuta Lambertovom metodom ( ${}^wK_d(av) = 0.0410, R^2 = 0.9889$ ), dok su logaritamska i derivacijska metoda ( ${}^wK_d(av) = 0.0419, R^2 = 0.9947$ ) postigle jednaku vrijednost koeficijenta determinacije. Koeficijenti determinacije za obične postepene, odnosno težinske postepene metode su u potpunosti jednaki onima za obične direktne, odnosno težinske direktne metode.

Običnom direktnom, odnosno običnom postepenom derivacijskom metodom je najbolji rezultat postignut aproksimacijom derivacije unaprijed s greškom prvog reda, dok je težinskom direktnom, odnosno težinskom postepenom derivacijskom metodom najbolji rezultat postignut centralnom aproksimacijom derivacije s greškom drugog reda. Običnom direktnom, običnom postepenom, težinskom direktnom i težinskom postepenom Lambertovom metodom je najbolji rezultat postignut aproksimacijom derivacije unatrag s greškom prvog reda.

Logaritamskom i derivacijskom metodom je postignut bolji rezultat u kombinaciji s težinskom direktnom, odnosno težinskom postepenom metodom, dok je Lambertovom metodom postignut bolji rezultat u kombinaciji s običnom direktnom, odnosno običnom postepenom metodom. Metoda najmanjih kvadrata je upotrijebljena samo u kombinaciji s običnom direktnom, odnosno običnom postepenom metodom.

Na slikama 4.4-4.7, su dani histogrami greške, gdje je greška definirana kao razlika između logaritamske vrijednosti izmjerene relativne iradijance i logaritamske vrijednosti procijenjene relativne iradijance. Maksimalne vrijednosti greške su najmanje za običnu direktnu, odnosno običnu postepenu logaritamsku i derivacijsku metodu. Lambertove metode u svim slučajevima postižu maksimalnu vrijednost normalne raspodjele, ali i maksimalnu vrijednost greške. Maksimalna vrijednost greške je najveća za težinsku direktnu, odnosno težinsku postepenu Lambertovu

metodu. Odstupanje od normalne raspodijele je najizraženije za metodu najmanjih kvadrata koja češće precjenjuje, nego što podcjenjuje vrijednost relativne iradijance. Analogni zaključci se mogu donijeti iz odnosa logaritamske vrijednosti izmjerene relativne iradijance i logaritamske vrijednosti procijenjene relativne iradijance prikazanih na slikama 4.8-4.11.

Ovim radom je pokazano da se Lambertovom metodom baziranoj na Lambertovoj  $W$  funkciji može uspješno procijeniti obični i težinski prosječni vertikalni koeficijent atenuacije dolje usmjerene iradijance. Od svih metoda najbolji koeficijent determinacije je postignut upotrebom metode najmanjih kvadrata, koja je ujedno i najoptimalnija po pitanju računalnih zahtjeva.

Atenuacija svjetlosti pri različitim valnim duljinama ovisi o sadržaju promatranog vodenog medija, te se može bitno razlikovati između različitih dijelova spektra. Metode primijenjene u ovom radu se mogu analogno primijeniti za procjenu običnog ili težinskog prosječnog vertikalnog koeficijenta atenuacije dolje usmjerene iradijance za uži dio elektromagnetskog spektra što je posebno važno u analizi sastava vodenog medija, ali i primjeni podvodnih bežičnih komunikacijskih tehnologija.

## 6 LITERATURA

- [1] Steward, R. H. (2000). *Introduction To Physical Oceanography*. Preuzeto s: <https://www.uv.es/hegigui/Kasper/por%20Robert%20H%20Stewart.pdf>. Pristupljeno 27.07.2020.
- [2] Kirk, John T. O. (2011). *Light and photosynthesis in aquatic ecosystems*. Cambridge University Press, New York.
- [3] Philip Ronan, Gringer. (2013). Revised diagram with re-aligned spectrum. Preuzeto s: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EM\\_spectrumrevised.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EM_spectrumrevised.png) Pristupljeno 10.04.2020.
- [4] Kirk, J. T. O. (2003). The vertical attenuation of irradiance as a function of the optical properties of the water. *Limnology and Oceanography* 48(1), 9-17. doi:10.4319/lo.2003.48.1.0009
- [5] Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D. E. G., Jeffrey, D. J., & Knuth, D. E. (1996). On the Lambert W function. *Advances in Computational Mathematics*, 5(1), 329-359. doi:10.1007/BF02124750.
- [6] Kulla S. (2013). The two real branches  $W_0$  and  $W_{-1}$  of the Lambert W function. Preuzeto s: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diagram\\_of\\_the\\_real\\_branches\\_of\\_the\\_Lambert\\_W\\_function.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diagram_of_the_real_branches_of_the_Lambert_W_function.png) Pristupljeno 13.04.2020.
- [7] Hawaii Ocean Time-Series (HOT). URL: <http://hahana.soest.hawaii.edu/hot/> Pristupljeno 18.05.2020.
- [8] National Science Foundation. Hawaiian islands. Preuzeto s: <http://hahana.soest.hawaii.edu/hot/hawaii2d.gif> Pristupljeno 04.05.2020.
- [9] National Science Foundation. Free-falling Optical Profiler (AKA, the HyperPro). Preuzeto s: <http://hahana.soest.hawaii.edu/hot/methods/hyperpro.html> Pristupljeno 04.05.2020.

[10] National Science Foundation. Hawaii Ocean Time-series; Data Organization & Graphical System; Hyperspectral (Ir)radiance Display. Preuzeto s:  
<http://hahana.soest.hawaii.edu/hot/hot-dogs/hydisplay.html> Pristupljeno 12.05.2020.

## **PRILOG**

Kod: Učitavanje i uređivanje podataka

Kod: Metoda najmanjih kvadrata

Kod: Logaritamska metoda

Kod: Derivacijska metoda

Kod: Lambertova metoda

## Kod: Učitavanje i uređivanje podataka

```
clear;
%Učitavanje PAR mjerenja iz .txt dokumenta
%Učitavanje rednog broja putovanja (215-318) koji djeluje kao oznaka profila
fileID = fopen('PAR_mjerenja_215-318.txt','r');
oznaka_profila=textscan(fileID,'%f %f %f %f %f','Delimiter',''); %
fclose(fileID);
%Učitavanje dubina svih profila
fileID = fopen('PAR_mjerenja_215-318.txt','r');
z=textscan(fileID,'%f %f %f %f %f','Delimiter','');
fclose(fileID);
%Učitavanje iradijance svih profila
fileID = fopen('PAR_mjerenja_215-318.txt','r');
E=textscan(fileID,'%f %f %f %f %f','Delimiter','');
fclose(fileID);

%Uklanjanje profila 215-318 koja ne sadrže potrebna mjerenja ili su odbačena, te odvajanje dubine i
iradijance po profilima
broj_uklonjenih_profila=0;
for i=oznaka_profila{1}(1):oznaka_profila{1}(end)
    broj_mjerenja_po_profilu_t(i-oznaka_profila{1}(1)+1)=sum(oznaka_profila{1}==i);
    if broj_mjerenja_po_profilu_t(i-oznaka_profila{1}(1)+1)==1
        broj_uklonjenih_profila=broj_uklonjenih_profila+1;
    end
end
broj_profila_t=numel(broj_mjerenja_po_profilu_t);
pocetni_index_profila(1)=1;
for j=1:broj_profila_t
    pocetni_index_profila(j+1)=pocetni_index_profila(j)+broj_mjerenja_po_profilu_t(j);
end
for j=1:broj_profila_t
    z_po_profilu_t{j}=z{1}(pocetni_index_profila(j):(pocetni_index_profila(j+1)-1));
    E_po_profilu_t{j}= E{1}(pocetni_index_profila(j):(pocetni_index_profila(j+1)-1));
end
z_po_profilu=[];
E_po_profilu=[];
broj_mjerenja_po_profilu=[];
for j=1:broj_profila_t
    if ~isequal(z_po_profilu_t{j},{0})
        z_po_profilu=[z_po_profilu,z_po_profilu_t{j)];
        E_po_profilu=[E_po_profilu,E_po_profilu_t{j)];
        broj_mjerenja_po_profilu=[broj_mjerenja_po_profilu,broj_mjerenja_po_profilu_t{j)];
    end
end
broj_profila=broj_profila_t-broj_uklonjenih_profila;

%Lokalno usrednjenje iradijance
for j=1:broj_profila
    E_po_profilu{j}=movmean(E_po_profilu{j},5); %*
end

*Naredbom „movmean“ je svaka vrijednost usrednjena s dva susjedna mjerenja sa svake strane niza

%Učitavanje PAR površinskih mjerenja iz .txt dokumenta
%Učitavanje rednog broja putovanja (215-318) koji djeluje kao oznaka profila
fileID = fopen('PAR_povrsinska_mjerenja_215-318.txt','r');
oznaka_profila_p=textscan(fileID,'%f %f %f %f %f','Delimiter','');
```



```

fclose(fileID);
%Učitavanje dubina svih profila
fileID = fopen('PAR_povrsinska_mjerenja_215-318.txt','r');
z_p=textscan(fileID,'%f %f %f %f %f','Delimiter',' ');
fclose(fileID);
%Učitavanje iradijance svih profila
fileID = fopen('PAR_povrsinska_mjerenja_215-318.txt','r');
E_p=textscan(fileID,'%f %f %f %f %f','Delimiter',' ');
fclose(fileID);

%Uklanjanje profila 215-318 koja ne sadrže potrebna mjerenja ili su odbačena, te odvajanje dubine i
iradijance po profilima
broj_uklonjenih_profila_p=0;
for i=oznaka_profila_p{1}(1):oznaka_profila_p{1}(end)
    broj_mjerenja_po_profilu_p_t(i-oznaka_profila_p{1}(1)+1)=sum(oznaka_profila_p{1}==i);
    if broj_mjerenja_po_profilu_p_t(i-oznaka_profila_p{1}(1)+1)==1
        broj_uklonjenih_profila_p=broj_uklonjenih_profila_p+1;
    end
end
broj_profila_p_t=numel(broj_mjerenja_po_profilu_p_t);
pocetni_index_profila_p(1)=1;
for j=1:broj_profila_p_t
    pocetni_index_profila_p(j+1)=pocetni_index_profila_p(j)+broj_mjerenja_po_profilu_p_t(j);
end
for j=1:broj_profila_p_t
    z_po_profilu_p_t{j}=z_p{1}(pocetni_index_profila_p(j):(pocetni_index_profila_p(j+1)-1));
    E_po_profilu_p_t{j}=E_p{1}(pocetni_index_profila_p(j):(pocetni_index_profila_p(j+1)-1));
end
z_po_profilu_p=[];
E_po_profilu_p=[];
broj_mjerenja_po_profilu_p=[];
for j=1:broj_profila_p_t
    if ~isequal(z_po_profilu_p_t(j),{0})
        z_po_profilu_p=[z_po_profilu_p,z_po_profilu_p_t(j)];
        E_po_profilu_p=[E_po_profilu_p,E_po_profilu_p_t(j)];
        broj_mjerenja_po_profilu_p=[broj_mjerenja_po_profilu_p,broj_mjerenja_po_profilu_p_t(j)];
    end
end
broj_profila_p=broj_profila_p_t-broj_uklonjenih_profila_p;

%Lokalno usrednjenje površinske iradijance
for j=1:broj_profila_p
    E_po_profilu_p{j}=movmean(E_po_profilu_p{j},5); %*
end

*Naredbom „movmean“ je svaka vrijednost usrednjena s dva susjedna mjerenja sa svake strane niza

%Određivanje relativne PAR iradijacije
for j=1:broj_profila
    relativna_E_po_profilu{j}=E_po_profilu{j}/E_po_profilu_p{j};
end
E_po_profilu=relativna_E_po_profilu;

```

## Kod: Metoda najmanjih kvadrata

```

%Procjena običnog prosječnog koeficijenta atenuacije svakog profila
for j=1:broj_profila
    fit_parametri{j} = fitcurve(z_po_profilu{j},E_po_profilu{j});
end

```

```

fit_E_0_po_profilu(j)=fit_parametri{j}(1);
fit_K_avg_po_profilu(j)=fit_parametri{j}(2);
end

%Procjena ukupnog običnog prosječnog koeficijenta atenuacije svih profila
fit_K_avg=mean(fit_K_avg_po_profilu);

%Procjena profila
for j=1:broj_profila
    %Obična direktna metoda
    fit1_E_po_profilu{j}=fit_E_0_po_profilu(j)*exp(-fit_K_avg_po_profilu(j)*z_po_profilu{j});
    %Obična postepena metoda
    fit2_E_po_profilu{j}(1)=E_po_profilu{j}(1);
    for i=1:broj_mjerenja_po_profilu(j)-1
        fit2_E_po_profilu{j}(i+1)=fit2_E_po_profilu{j}(i)*exp(-fit_K_avg_po_profilu(j)*(z_po_profilu{j}(i+1)-
z_po_profilu{j}(i)));
    end
end

%Koeficijent determinacije
for j=1:broj_profila
    %Obična direktna metoda
    t=fitlm(E_po_profilu{j},fit1_E_po_profilu{j});
    fit1_R_2(j,1)=t.Rsquared.Ordinary;
    %Obična postepena metoda
    t=fitlm(E_po_profilu{j},fit2_E_po_profilu{j});
    fit2_R_2(j,1)=t.Rsquared.Ordinary;
end

```

Kod funkcije „fitcurve“ koja računa amplitudu i koeficijent eksponencijalne funkcije

```

function [estimates, model] = fitcurve(xdata, ydata)
% Poziva fminsearch sa nasumičnom početnom točkom
start_point = rand(1, 2);
% start_point = [300, 0.04];
model = @expfun;
estimates = fminsearch(model, start_point);
% expfun prihvaća parametre krivulje kao ulazne podatke, a kao izlazne podatke daje sumu kvadrata
%greške sse za A*exp(-%lambda*xdata)-ydata, i FittedCurve. FMINSEARCH traži samo sse, ali mi
%želimo plotati %FittedCurve na kraju.
function [sse, FittedCurve] = expfun(params)
    A = params(1);
    lambda = params(2);
    FittedCurve = A .* exp(-lambda * xdata);
    ErrorVector = FittedCurve - ydata;
    sse = sum(ErrorVector .^ 2);
end
end

```

## Kod: Logaritamska metoda

```

%Procjena koeficijenta atenuacije pri svakoj dubini svakog profila
for j=1:broj_profila
    br=0;
    for i=1:broj_mjerenja_po_profilu(j)-2

```

```

        br=br+1;
        ln_K_dubina_t{j}(br)=-log(E_po_profilu{j}(i+2)/E_po_profilu{j}(i))/(z_po_profilu{j}(i+2)-
z_po_profilu{j}(i));
        ln_E_po_profilu_t{j}(br)=E_po_profilu{j}(i+1);
    end
    ln_broj_mjerenja_po_profilu_t(j)=br;
end
ln_K_dubina_sve=[];
for j=1:broj_profila
    br=0;
    for i=1:ln_broj_mjerenja_po_profilu_t(j)
        if ln_K_dubina_t{j}(i)>0 & isfinite(ln_K_dubina_t{j}(i)) %*
            br=br+1;
            ln_K_dubina{j}(br)=ln_K_dubina_t{j}(i);
            ln_K_dubina_sve=cat(1,ln_K_dubina_sve,ln_K_dubina{j}(br));
            ln_E_po_profilu_t{j}(br)=ln_E_po_profilu_t{j}(i);
        end
    end
    ln_broj_mjerenja_po_profilu(j)=br;
end

```

\*Samo pozitivni koeficijenti su reprezentativni. Iradijanca jednaka nuli u brojniku, odnosno nazivniku za K daje Inf, odnosno -Inf

%Procjena prosječnog koeficijenta atenuacije svakog profila

```

for k=1:5
    for j=1:broj_profila
        %Obični
        ln_K_avg_po_profilu(j)=mean(ln_K_dubina{j});
        %Težinski
        ln_w_K_avg_po_profilu(j)=sum(ln_K_dubina{j}.*ln_E_po_profilu_t{j})/sum(ln_E_po_profilu_t{j});
    end
end

```

%Procjena ukupnog prosječnog koeficijenta atenuacije svih profila

```

%Obični
ln_K_avg=mean(ln_K_avg_po_profilu);
%Težinski
ln_w_K_avg=mean(ln_w_K_avg_po_profilu);

```

%Procjena profila

```

for j=1:broj_profila
    %Obična direktna metoda
    ln1_E_po_profilu{j}=E_po_profilu{j}(1)*exp(-ln_K_avg_po_profilu(j)*(z_po_profilu{j}-
z_po_profilu{j}(1)));
    %Težinska direktna metoda
    ln1_w_E_po_profilu{j}=E_po_profilu{j}(1)*exp(-ln_w_K_avg_po_profilu(j)*(z_po_profilu{j}-
z_po_profilu{j}(1)));
    %Obična postepena metoda
    ln2_E_po_profilu{j}(1)=E_po_profilu{j}(1);
    for i=1:broj_mjerenja_po_profilu(j)-1
        ln2_E_po_profilu_t{j}(i+1)=ln2_E_po_profilu_t{j}(i)*exp(-ln_K_avg_po_profilu(j)*(z_po_profilu_t{j}(i+1)-
z_po_profilu_t{j}(i)));
    end
    %Težinska postepena metoda
    ln2_w_E_po_profilu_t{j}(1)=E_po_profilu_t{j}(1);
    for i=1:broj_mjerenja_po_profilu(j)-1
        ln2_w_E_po_profilu_t{j}(i+1)=ln2_w_E_po_profilu_t{j}(i)*exp(-ln_w_K_avg_po_profilu(j)*
(z_po_profilu_t{j}(i+1)-z_po_profilu_t{j}(i)));
    end
end

```

```

end

%Koeficijent determinacije
for j=1:broj_profila
    %Obična direktna metoda
    t=fitlm(E_po_profilu{j},ln1_E_po_profilu{j});
    ln1_R_2(j)=t.Rsquared.Ordinary
    %Težinska direktna metoda
    t=fitlm(E_po_profilu{j},ln1_w_E_po_profilu{j});
    ln1_w_R_2(j)=t.Rsquared.Ordinary;
    %Obična postepena metoda
    t=fitlm(E_po_profilu{j},ln2_E_po_profilu{j});
    ln2_R_2(j)=t.Rsquared.Ordinary;
    %Težinska postepena metoda
    t=fitlm(E_po_profilu{j},ln2_w_E_po_profilu{j});
    ln2_w_R_2(j)=t.Rsquared.Ordinary;
end

```

## Kod: Derivacijska metoda

```

%Procjena koeficijenta atenuacije pri svakoj dubini svakog profila uz različite aproksimacije derivacije
h=1;
for j=1:broj_profila
    %Aproksimacija derivacije unaprijed s greškom prvog reda
    br=0;
    for i=1:broj_mjerenja_po_profilu(j)-1
        br=br+1;
        der_K_dubina_t{1}{j}(br)=-(1/E_po_profilu{j}(i))*(E_po_profilu{j}(i+h)-E_po_profilu{j}(i))/h;
        der_E_po_profilu_t{1}{j}(br)=E_po_profilu{j}(i);
    end
    der_broj_mjerenja_po_profilu_t{1}{j}=br;
    %Aproksimacija derivacije unatrag s greškom prvog reda
    br=0;
    for i=2:broj_mjerenja_po_profilu(j)
        br=br+1;
        der_K_dubina_t{2}{j}(br)=-(1/E_po_profilu{j}(i))*(E_po_profilu{j}(i)- E_po_profilu{j}(i-h))/h;
        der_E_po_profilu_t{2}{j}(br)=E_po_profilu{j}(i);
    end
    der_broj_mjerenja_po_profilu_t{2}{j}=br;
    %Centralna aproksimacija derivacije s greškom drugog reda
    br=0;
    for i=2:broj_mjerenja_po_profilu(j)-1
        br=br+1;
        der_K_dubina_t{3}{j}(br)=-(1/E_po_profilu{j}(i))*(E_po_profilu{j}(i+h)-E_po_profilu{j}(i-h))/(2*h);
        der_E_po_profilu_t{3}{j}(br)=E_po_profilu{j}(i);
    end
    der_broj_mjerenja_po_profilu_t{3}{j}=br;
    %Aproksimacija derivacije unaprijed s greškom drugog reda
    br=0;
    for i=1:broj_mjerenja_po_profilu(j)-2
        br=br+1;
        der_K_dubina_t{4}{j}(br)=-(1/E_po_profilu{j}(i))*(-E_po_profilu{j}(i+2*h)+4*E_po_profilu{j}(i+h)-
3*I_po_profilu{j}(i))/(2*h);
        der_E_po_profilu_t{4}{j}(br)=E_po_profilu{j}(i);
    end
    der_broj_mjerenja_po_profilu_t{4}{j}=br;
end

```

```

%Apksimacija derivacije unatrag s greškom drugog reda
br=0;
for i=3:broj_mjerenja_po_profilu(j)
    br=br+1;
    der_K_dubina_t{5}{j}(br)=-(1/E_po_profilu{j}(i))*(3*E_po_profilu{j}(i)-4*E_po_profilu{j}(i-h)+L_po_profilu{j}(i-2*h))/(2*h);
    der_E_po_profilu_t{5}{j}(br)=E_po_profilu{j}(i);
end
der_broj_mjerenja_po_profilu_t{5}(j)=br;
end
for k=1:5
    der_K_dubina_sve{k}=[];
    for j=1:broj_profila
        br=0;
        for i=1:der_broj_mjerenja_po_profilu_t{k}(j)
            if der_K_dubina_t{k}{j}(i)>0 & isfinite(der_K_dubina_t{k}{j}(i)) %*
                br=br+1;
                der_K_dubina{k}{j}(br)=der_K_dubina_t{k}{j}(i);
                der_K_dubina_sve{k}=cat(1,der_K_dubina_sve{k},der_K_dubina{k}{j}(br));
                der_E_po_profilu{k}{j}(br)=der_E_po_profilu_t{k}{j}(i);
            end
        end
        der_broj_mjerenja_po_profilu{k}(j)=br;
    end
end
end

```

\*Samo su pozitivni koeficijenti reprezentativni. Iradijanca jednaka nuli u brojniku, odnosno nazivniku za K daje Inf, odnosno -Inf

```

%Procjena prosječnog koeficijenta atenuacije svakog profila
for k=1:5
    for j=1:broj_profila
        %Obični
        der_K_avg_po_profilu{k}(j)=mean(der_K_dubina{k}{j});
        %Težinski
        der_w_K_avg_po_profilu{k}(j)=sum(der_K_dubina{k}{j}.*der_E_po_profilu{k}{j})/
sum(der_E_po_profilu{k}{j});
    end
end

```

```

%Procjena ukupnog prosječnog koeficijenta atenuacije svih profila
for k=1:5
    %Obični
    der_K_avg(k)=mean(der_K_avg_po_profilu{k});
    %Težinski
    der_w_K_avg(k)=mean(der_w_K_avg_po_profilu{k});
end

```

```

%Procjena profila
for k=1:5
    for j=1:broj_profila
        %Obična direktna metoda
        der1_E_po_profilu{k}{j}=E_po_profilu{j}(1)*exp(-der_K_avg_po_profilu{k}(j)*(z_po_profilu{j}-z_po_profilu{j}(1)));
        %Težinska direktna metoda
        der1_w_E_po_profilu{k}{j}=E_po_profilu{j}(1)*exp(-der_w_K_avg_po_profilu{k}(j)*(z_po_profilu{j}-z_po_profilu{j}(1)));
        %Obična postepena metoda
        der2_E_po_profilu{k}{j}(1)=E_po_profilu{j}(1);
        for i=1:broj_mjerenja_po_profilu(j)-1

```

```

        der2_E_po_profilu{k}{j}(i+1)=der2_E_po_profilu{k}{j}(i)*exp(-der_K_avg_po_profilu{k}{j}*
(z_po_profilu{j}(i+1)-z_po_profilu{j}(i)));
    end
    %Težinska postepena metoda
    der2_w_E_po_profilu{k}{j}(1)=E_po_profilu{j}(1);
    for i=1:broj_mjerenja_po_profilu(j)-1
        der2_w_E_po_profilu{k}{j}(i+1)=der2_w_E_po_profilu{k}{j}(i)*exp(-
der_w_K_avg_po_profilu{k}{j}*(z_po_profilu{j}(i+1)-z_po_profilu{j}(i)));
    end
end
end
end

%Koeficijent determinacije
for k=1:5
    for j=1:broj_profila
        %Obična direktna metoda
        t=fitlm(E_po_profilu{j},der1_E_po_profilu{k}{j});
        der1_R_2{k}(j)=t.Rsquared.Ordinary;
        %Težinska direktna metoda
        t=fitlm(E_po_profilu{j},der1_w_E_po_profilu{k}{j});
        der1_w_R_2{k}(j)=t.Rsquared.Ordinary;
        %Obična postepena metoda
        t=fitlm(E_po_profilu{j},der2_E_po_profilu{k}{j});
        der2_R_2{k}(j)=t.Rsquared.Ordinary;
        %Težinska postepena metoda
        t=fitlm(E_po_profilu{j},der2_w_E_po_profilu{k}{j});
        der2_w_R_2{k}(j)=t.Rsquared.Ordinary;
    end
end
end

```

## Kod: Lambertova metoda

```

%Procjena koeficijenta atenuacije pri svakoj dubini svakog profila uz različite aproksimacije derivacije
h=1;
for j=1:broj_profila
    %Aproksimacija derivacije unaprijed s greškom prvog reda
    br=0;
    for i=1:broj_mjerenja_po_profilu(j)-1
        br=br+1;
        Lambert_argument{1}{j}(br)=((z_po_profilu{j}(i)-z_po_profilu{j}(1))/E_po_profilu{j}(1))*
(E_po_profilu{j}(i+h)-E_po_profilu{j}(i))/h;
        Lambert_E_po_profilu_t{1}{j}(br)=E_po_profilu{j}(i);
        Lambert_z_po_profilu_t{1}{j}(br)=z_po_profilu{j}(i);
    end
    Lambert_broj_mjerenja_po_profilu_t{1}(j)=br;
    %Aproksimacija derivacije unatrag s greškom prvog reda
    br=0;
    for i=2:broj_mjerenja_po_profilu(j)
        br=br+1;
        Lambert_argument{2}{j}(br)=((z_po_profilu{j}(i)-z_po_profilu{j}(1))/E_po_profilu{j}(1))*
(E_po_profilu{j}(i)-E_po_profilu{j}(i-h))/h;
        Lambert_E_po_profilu_t{2}{j}(br)=E_po_profilu{j}(i);
        Lambert_z_po_profilu_t{2}{j}(br)=z_po_profilu{j}(i);
    end
    Lambert_broj_mjerenja_po_profilu_t{2}(j)=br;
    %Centralna aproksimacija derivacije s greškom drugog reda

```

```

br=0;
for i=2:broj_mjerenja_po_profilu(j)-1
    br=br+1;
    Lambert_argument{3}{j}(br)=((z_po_profilu{j}(i)-z_po_profilu{j}(1))/E_po_profilu{j}(1))*
(E_po_profilu{j}(i+h)-E_po_profilu{j}(i-h))/(2*h);
    Lambert_E_po_profilu_t{3}{j}(br)=E_po_profilu{j}(i);
    Lambert_z_po_profilu_t{3}{j}(br)=z_po_profilu{j}(i);
end
Lambert_broj_mjerenja_po_profilu_t{3}(j)=br;
%Aprksimacija derivacije unaprijed s greškom drugog reda
br=0;
for i=1:broj_mjerenja_po_profilu(j)-2
    br=br+1;
    Lambert_argument{4}{j}(br)=((z_po_profilu{j}(i)-z_po_profilu{j}(1))/E_po_profilu{j}(1))*(-
E_po_profilu{j}(i+2*h)+4*E_po_profilu{j}(i+h)-3*E_po_profilu{j}(i))/(2*h);
    Lambert_E_po_profilu_t{4}{j}(br)=E_po_profilu{j}(i);
    Lambert_z_po_profilu_t{4}{j}(br)=z_po_profilu{j}(i);
end
Lambert_broj_mjerenja_po_profilu_t{4}(j)=br;
%Aprksimacija derivacije unatrag s greškom drugog reda
br=0;
for i=3:broj_mjerenja_po_profilu(j)
    br=br+1;
    Lambert_argument{5}{j}(br)=((z_po_profilu{j}(i)-z_po_profilu{j}(1))/E_po_profilu{j}(1))*
(3*E_po_profilu{j}(i)-4*E_po_profilu{j}(i-h)+E_po_profilu{j}(i-2*h))/(2*h);
    Lambert_E_po_profilu_t{5}{j}(br)=E_po_profilu{j}(i);
    Lambert_z_po_profilu_t{5}{j}(br)=z_po_profilu{j}(i);
end
Lambert_broj_mjerenja_po_profilu_t{5}(j)=br;
end

for k=1:5
    for j=1:broj_profila
        for i=1:Lambert_broj_mjerenja_po_profilu_t{k}(j)
            if Lambert_argument{k}{j}(i)<(-1/exp(1)) %*
                Lambert_argument{k}{j}(i)=NaN;
                Lambert_E_po_profilu_t{k}{j}(i)=NaN;
                Lambert_z_po_profilu_t{k}{j}(i)=NaN;
            end
            Lambert_osnovnagrada{k}{j}(i)=lambertw(0,Lambert_argument{k}{j}(i)); %**
            Lambert_prvagrada{k}{j}(i)=lambertw(-1,Lambert_argument{k}{j}(i)); %***
            if real(Lambert_prvagrada{k}{j}(i))== -Inf %****
                Lambert_prvagrada{k}{j}(i)=NaN;
                Lambert_E_po_profilu_t{k}{j}(i)=NaN;
                Lambert_z_po_profilu_t{k}{j}(i)=NaN;
            end
        end
        indeks_min_argumenta{k}{j}=find(Lambert_argument{k}{j)==min(Lambert_argument{k}{j}));
        for i=1:Lambert_broj_mjerenja_po_profilu_t{k}(j)
            if i<=indeks_min_argumenta{k}{j} %*****
                Lambert_K_dubina_t{k}{j}(i)=-(1/(Lambert_z_po_profilu_t{k}{j}(i)-z_po_profilu{j}(1)))*)
                Lambert_osnovnagrada{k}{j}(i);
            else
                Lambert_K_dubina_t{k}{j}(i)=-(1/(Lambert_z_po_profilu_t{k}{j}(i)-z_po_profilu{j}(1)))*)
                real(Lambert_prvagrada{k}{j}(i));
            end
        end
        Lambert_K_dubina_t{k}{j}=Lambert_K_dubina_t{k}{j}(~isnan(Lambert_K_dubina_t{k}{j}));
        Lambert_E_po_profilu_t{k}{j}=Lambert_E_po_profilu_t{k}{j}(~isnan(Lambert_E_po_profilu_t{k}{j}));
        Lambert_broj_mjerenja_po_profilu_t{k}(j)=size(Lambert_K_dubina_t{k}{j},2);
    end
end

```

```
end
end
```

```
*Za argument manji od -1/e lambertova funkcija nije realna
**Izračun lambertw(0,argument) za argumente -1/e<argument<=0
***Izračun lambertw(-1,argument) za argumente -1/e<argument<=0
****Ako je argument jako malen biti ce zaokruzen na nulu, iako u stvarnosti nije nula, a vrijedi lambertw(-1,0)=-Inf
*****Za dubine manje od dubine minimalnog argumenta koristi se osnovna grana, a za vece dubine prva grana lambertove funkcije
```

```
for k=1:5
    Lambert_K_dubina_sve{k}=[];
    for j=1:broj_profila
        br=0;
        for i=1:Lambert_broj_mjerenja_po_profilu_t{k}(j)
            if Lambert_K_dubina_t{k}{j}(i)>0 & isfinite(Lambert_K_dubina_t{k}{j}(i)) *
                br=br+1;
                Lambert_K_dubina{k}{j}(br)=Lambert_K_dubina_t{k}{j}(i);
                Lambert_K_dubina_sve{k}=cat(1,Lambert_K_dubina_sve{k},Lambert_K_dubina{k}{j}(br));
                Lambert_E_po_profilu{k}{j}(br)=Lambert_E_po_profilu_t{k}{j}(i);
            end
        end
        Lambert_broj_mjerenja_po_profilu{k}(j)=br;
    end
end
```

```
*Samo pozitivni koeficijenti su reprezentativni
```

```
%Procjena prosječnog koeficijenta atenuacije svakog profila
```

```
for k=1:5
    for j=1:broj_profila
        %Obični
        Lambert_K_avg_po_profilu{k}(j)=mean(Lambert_K_dubina{k}{j});
        %Težinski
        Lambert_w_K_avg_po_profilu{k}(j)=sum(Lambert_K_dubina{k}{j}.*Lambert_E_po_profilu{k}{j})/sum(Lambert_E_po_profilu{k}{j});
    end
    Lambert_K_avg_min{k}=min(Lambert_K_avg_po_profilu{k});
    Lambert_K_avg_max{k}=max(Lambert_K_avg_po_profilu{k});
    Lambert_w_K_avg_min{k}=min(Lambert_w_K_avg_po_profilu{k});
    Lambert_w_K_avg_max{k}=max(Lambert_w_K_avg_po_profilu{k});
end
```

```
%Procjena ukupnog prosječnog koeficijenta atenuacije svih profila
```

```
for k=1:5
    %Obični
    Lambert_K_avg(k)=mean(Lambert_K_avg_po_profilu{k});
    %Težinski
    Lambert_w_K_avg(k)=mean(Lambert_w_K_avg_po_profilu{k});
end
```

```
%Procjena profila
```

```
for k=1:5
    for j=1:broj_profila
        %Obična direktna metoda
        Lambert1_E_po_profilu{k}{j}=E_po_profilu{j}(1)*exp(-Lambert_K_avg_po_profilu{k}(j))*
(z_po_profilu{j}-z_po_profilu{j}(1));
        %Težinska direktna metoda
```



```

    Lambert1_w_E_po_profilu{k}{j}=E_po_profilu{j}(1)*exp(-Lambert_w_K_avg_po_profilu{k}{j}*
(z_po_profilu{j}-z_po_profilu{j}(1)));
    %Obična postepena metoda
    Lambert2_E_po_profilu{k}{j}(1)=E_po_profilu{j}(1);
    for i=1:broj_mjerenja_po_profilu(j)-1
        Lambert2_E_po_profilu{k}{j}(i+1)=Lambert2_E_po_profilu{k}{j}(i)*exp(-
Lambert_K_avg_po_profilu{k}{j}*(z_po_profilu{j}(i+1)-z_po_profilu{j}(i)));
    end
    %Težinska postepena metoda
    Lambert2_w_E_po_profilu{k}{j}(1)=E_po_profilu{j}(1);
    for i=1:broj_mjerenja_po_profilu(j)-1
        Lambert2_w_E_po_profilu{k}{j}(i+1)=Lambert2_w_E_po_profilu{k}{j}(i)*exp(-
Lambert_w_K_avg_po_profilu{k}{j}*(z_po_profilu{j}(i+1)-z_po_profilu{j}(i)));
    end
end
end
end

%Koeficijent determinacije
for k=1:5
    for j=1:broj_profila
        %Obična direktna metoda
        t=fitlm(E_po_profilu{j},Lambert1_E_po_profilu{k}{j});
        Lambert1_R_2{k}(j)=t.Rsquared.Ordinary;
        %Težinska direktna metoda
        t=fitlm(E_po_profilu{j},Lambert1_w_E_po_profilu{k}{j});
        Lambert1_w_R_2{k}(j)=t.Rsquared.Ordinary;
        %Obična postepena metoda
        t=fitlm(E_po_profilu{j},Lambert2_E_po_profilu{k}{j});
        Lambert2_R_2{k}(j)=t.Rsquared.Ordinary;
        %Težinska postepena metoda
        t=fitlm(E_po_profilu{j},Lambert2_w_E_po_profilu{k}{j});
        Lambert2_w_R_2{k}(j)=t.Rsquared.Ordinary;
    end
end
end

```