Gibanje naboja u elektromagnetskom polju vodiča u kontekstu specijalne teorije relativnosti

Šunjerga, Antonio

SVEUČILIŠTE U SPLITU

PRIRODOSLOVNO MATEMATIČKI FAKULTET

ZAVRŠNI RAD

GIBANJE NABOJA U ELEKTROMAGNETSKOM POLJU VODIČA U KONTEKSTU SPECIJALNE TEORIJE RELATIVNOSTI

Antonio Šunjerga

Split, rujan 2017.

Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Splitu
Prirodoslovno – matematički fakultet
Odjel za fiziku
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska

Završni rad

Gibanje naboja u elektromagnetskom polju vodiča u kontekstu specijalne teorije relativnosti

Antonio Šunjerga

Sveučilišni preddiplomski studij Fizika

Sažetak:
U ovom radu promatrat ćemo gibanje naboja u polju vodiča. U prvom dijelu izvesti ćemo Lorentzove transformacije direktno iz Einsteinovi postulata. Kasnije je pokazano relativističko objašnjenje magnetskog polja. Posebno je diskutirana Lorentzova sila na naboj u polju metalnog vodiča te česta greška koja se radi pri određivanju u laboratorijskom sustavu.

Ključne riječi: Specijalna teorija relativnosti, vodič, naboj, Lorentzova sila, magnetsko polje, driftna brzina

Mentor: prof. dr. sc. Franjo Sokolić

Ocjenjivači: prof. dr. sc. Franjo Sokolić
prof. dr. sc. Ante Bilušić
prof. dr. sc. Ivica Aviani

Rad prihvaćen: 20. 9. 2017.

Rad je pohranjen u knjižnici Prirodoslovno – matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu.

Zahvala:

Posebna zahvala mom mentoru prof.dr.sc. Franji Sokoliću na svim zanimljivim diskusijama i savjetima. Bila mi je privilegija sudjelovati na Vašim kolegijima i raditi završni rad kod Vas.

Hvala prof.dr.sc. Anti Bilušiću na svim zanimljivim predavanjima i posvećenosti pripremi svih kolegija. Bez njegovih materijala ovaj rad ne bih bio moguć.

Također, zahvaljujem svim svojim profesorima kroz cijeli proces obrazovanja za znanje koje su prenijeli na mene.

Hvala svim profesorima s PMF-a i FESB-a koji su mi svojom susretljivošću omogućili da ovo ostvarim.

Hvala kolegama sa fakulteta na svim diskusijama, materijalima i prijateljstvima.

Posebnu zahvalnost iskazujem svojoj djevojci za podupiranje svih mojih ludih ambicija.

Svim prijateljima i prijateljicama hvala na svim lijepim trenutcima.

Veliko hvala cijeloj mojoj obitelji koja je uvijek bila uz mene.

I na kraju najveće hvala mojim roditeljima koji su me uvijek beskrajno podupirali i bez kojih ovo sve ne bi bilo moguće …

SADRŽAJ

1. UVOD 1
2. EINSTEINOVI POSTULATI 2
2.1. Dilatacija vremena 3
2.2. Kontrakcija duljine 5
2.3. Lorentzove transformacije 6
3. GIBANJE NABOJA U ELEKTROMAGNESKOM POLJU VODIČA 10
3.1. Teorijski slučaj 10
3.2. Realni slučaj 14
4. ZAKLJUČAK 18
5. LITERATURA 19

1. UVOD

U klasičnoj mehanici vrijeme i prostor su međusobno nezavisni. Specijalna teorija relativnosti (STR) objašnjava odnos prostora i vremena. Za sustave u kojima se čestice gibaju relativno malim brzinama u odnosu na brzinu svijetlosti reducira se na klasičnu mehaniku. Ograničenost klasične mehanike slijedi iz činjenice što pretpostavlja da brzina gibanja može imati beskonačno velik iznos, što ne odgovara stvarnosti. Uz novu definiciju četvero prostora i novu definiciju veličina u tom prostoru Newtonovi zakoni ostaju vrijediti i u relativističkoj mehanici.

STR promatra odnos između inercijalnih sustava. Svi rezultati slijede iz dvaju Einsteinovi postulata. Iako iza same STR stoji relativno jednostavan matematički alat sami koncepti iz teorije se uvelike razlikuju od svakodnevnih iskustava pa izgledaju dosta apstraktno. Živimo u okruženju (gibamo se takvim brzinama) u kojem sve što vidimo i što nam se događa je rješivo u domeni klasične mehanike. Usprkos tome što efekte STR ne vidimo u svakodnevnom životu, njena upotreba u tehnologiji (npr. GPS) i znanstvenim istraživanjima je u širokoj upotrebi. Dolaze do izražaja kako na manjim skalama (elementarne čestice) tako i na većim skalama (promatranju svemira) gdje su brzine gibanja relativno velike. Valja napomenuti kako su relativistički efekti mjerljivi i na manjim brzinama kad se radi o problemima u elektrodinamici (magnetska sila), ali ti su efekti često promatrani kao zasebna pojava iako je njihov uzrok u STR.

Kako su prostor i vrijeme međusobno povezani zanima nas kako će prostorno i vremenski ovisne fizikalne veličine izgledati u različitim inercijalnim sustavima. Promatramo transformaciju između inercijalnih sustava te nas zanima koje su veličine invarijatne pri takvim transformacijama. U tu svrhu definira se pojam četvero vektora preko kojeg su redefinirane fizikalne veličine kako bi ostali vrijediti isti zakoni za sve sustave. U ovom radu zadržat ćemo se na klasičnom pristupu. U njemu do izražaja dolazi konceptualno shvaćanje fenomena relativističke mehanike, dok je pristup preko četvero vektora matematički elegantniji.

Promotrit ćemo relativističko objašnjenje magnetskog polja. Posebno će se promatrati iznos sile između vodiča i naboja u gibanju u različitim sustavima.

2. EINSTEINOVI POSTULATI

Kroz ovo poglavlje biti će izloženi Einsteinovi postulati specijalne teorije relativnosti (STR) te sve ono što slijedi iz njih. Pokušat ćemo sve izvesti direktno iz samih postulata, a naglasak će biti na konceptualno shvaćanje STR-a.

Specijalna teorija relativnosti se gradi na dva postulata [1]:

I. **Fizikalni zakoni su invarijatni u svim inercijalnim sustavima.**
II. **Brzina svjetlosti je jednaka za sve promatrače neovisno o gibanju izvora**

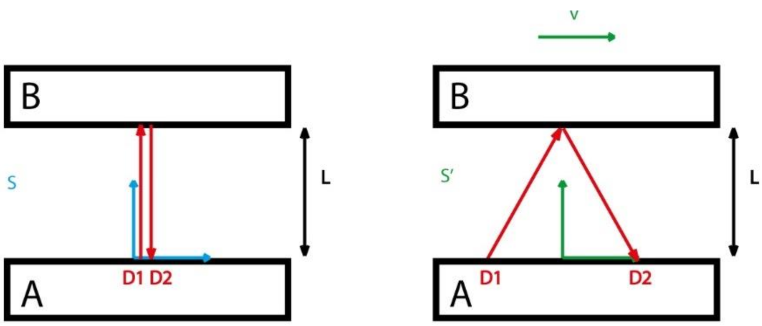
Za početak ćemo definirati prostor u kojem će se sve odvijati. Pretpostavljamo da je položaj čestice određen s njenim prostor-vremenskim koordinatama te da između njih postoji zavisnost.

Definirajmo još pojam događaja. Ishodi nekih interakcija dovesti će do nekog uređenja sustava čestica (međuodnosa između elemenata u sustavu). U skladu s I. postulatom, ne može postojati različit ishod takvih interakcija u različitim koordinatnim sustavima. Događaj je jedinstveno uređen svim prethodnim događajima i trenutnim rasporedom čestica u sustavu. Kao takav postoji jedinstven u svim sustavim, ali ne nužno na istim prostor-vremenskim koordinatama. Dakako treba napomenuti da se ovakva definicija ne protivi statističkoj prirodi nekih fizikalnih procesa . Ne govori nam da postoji samo jedan mogući ishod, već da ako se jedan od mogućih ishoda ostvario u jednom koordinatnom sustavu da se ujedno ostvario jednako u svim koordinatnim sustavima.

U nekim dijelovima bit će korišten pojam promatrača kojeg nije nužno uvodit, ali pojednostavljuje opis. Promatrač je vezan za koordinatni sustav i predstavlja opis okoline iz tog sustava.

2.1 Dilatacija vremena

Promotrimo sad što se u skladu s II. postulatom događa s vremenskom koordinatom u različitim koordinatnim sustavima. Postavimo ogledalo (B) i postolje (A), koja nisu u relativnom gibanju, i prvi koordinatni sustav (KS1) koji se ne giba relativno u odnosu na ogledalo i postolje. Zamislimo u tom sustavu promatrača koji emitira svjetlosni snop prema drugom ogledalu i mjeri vrijeme dok mu se taj snop reflektira. Možemo jasno opisati dva nama zanimljiva događaja. Prvi (D1) kad je svjetlost emitirana i drugi (D2) kad se refleksijom vratila do postolja.



Slika 2.1. Dilatacija vremena a.) KS1 lijevo b.) KS2 desno

Taj sustav je specifičan za promatrane događaje jer su se samo u njemu oni pojavili na istim prostornim koordinatama. Općenito definiramo vlastito vrijeme između događaja i ono je pridijeljeno onom sustavu u kojem promatrač bilježi najmanji mogući razmak u prostornim koordinatama između dvaju događaja, a koji je u ovom posebnom slučaju jednak nuli.

Sada možemo definirati i drugi sustav (KS2) u odnosu na kojeg se postolje i ogledalo gibaju nekom brzinom v u pozitivnom smjeru x-osi. U skladu s I. postulatom, različiti promatrači bilježe različite koordinate događaja što je prikazano na slici 2.1.

Duljina u nekom koordinatnom sustavu između dvije točke je definirana preko (pola) vremena potrebnog svjetlosti da dođe iz jedne točke koordinatnog sustava u drugu i da se vrati. To slijedi iz teorijski najtočnijeg mogućeg mjerenja svjetlosnom zrakom. Tad je vremenska udaljenost mjerenja događaja na početnoj i krajnjoj točci minimalna.

Kako za mjerenje duljine L1 i L2 u oba sustava početna i krajnja točka miruju njihova prostorno-vremenska udaljenost u oba KS je nezavisna o vremenu. U skladu s I između ogledala i postolja postoji međuodnos jednak u svim sustavima ali prikazan preko različitih četiriju koordinata. Za specijalno odabrane koordinatne sustave kao što su KS1 i KS2 na slici 2.1. Govorimo o 1 prostornoj dimenziji i 1 vremenskoj dimenziji. Kako se za ove sustave postolje i ogledalo ne gibaju u odnosu na ishodište taj međuodnos ovisi samo o jednoj dimenziji i to onoj prostornoj. U skladu s I. Zaključujemo da ta jedna koordinata mora biti ista u oba slučaja pa slijedi da je L1=L2. Treba napomenuti da u KS2 početna i krajnja točka nisu vezane uz gibanje postolja odnosno ogledala pa slika zrake svjetlosti mjerenja duljine izgleda jednako kao događaji opisani na Slici 2.1.a.

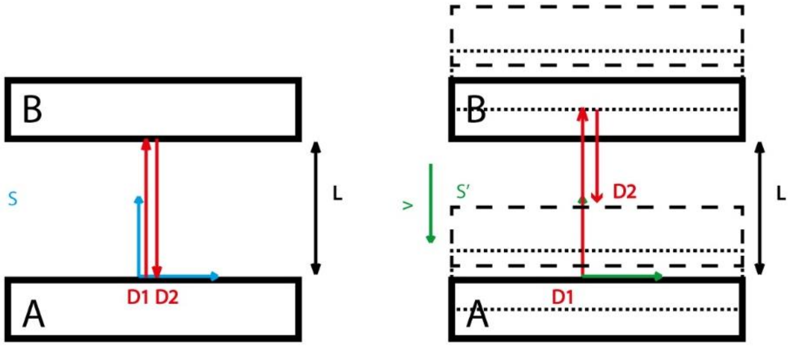
Uz jednaku brzinu svjetlosti(II) i jednak L u oba sustava u skladu s I zaključujemo da promatrači iz KS1 i KS2 mjere različita vremena između događaja D1 i D2. Nakon jednostavnog matematičkog računa slijedi :

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1}$$

U sustavu u kojem je prostorni razmak između događaja minimalan mjerimo i minimalno vrijeme između tih događaja. Slično se može pokazati i gibanje sustava duž druge dvije prostorne dimenzije pa brzina u (1) predstavlja iznos brzine s tri prostorne koordinate koja opisuje relativno gibanje između koordinatnih sustava.

2.2 Kontrakcija duljine

Promotrimo sad iste događaje D1 i D2 ali odaberimo drukčiji koordinatni sustav KS2. Neka to bude neki koordinatni sustav u odnosu na kojeg se postolje i ogledalo gibaju nekom brzinom v u pozitivnom smjeru y-osi.



Slika 2.2. Kontrakcija duljine a.)KS1 lijevo b.)KS2 desno

Kako postoji relativno gibanje između sustava promatrači mjere različita vremena između događaja u skladu s I. Mjerenje duljine L1 odnosno L2 se provode kao i u prethodnom primjeru. Za lakše promatranje možemo definirati srednji događaj DX kad svjetlosna zraka dođe do ogledala. Za KS2 početna i krajnja točka ne miruju pa su njihove koordinate vremenski zavisne. Između događaja D1 i DX krajnja točka odmiče brzinom v a između događaja DX i D2, D2 se istom brzinom primiče. Kažemo da ne mjerimo početnu i krajnju točku istovremeno i zbog toga se javlja kontrakcija duljine i uz (1) nakon jednostavnog matematičkog računa slijedi :

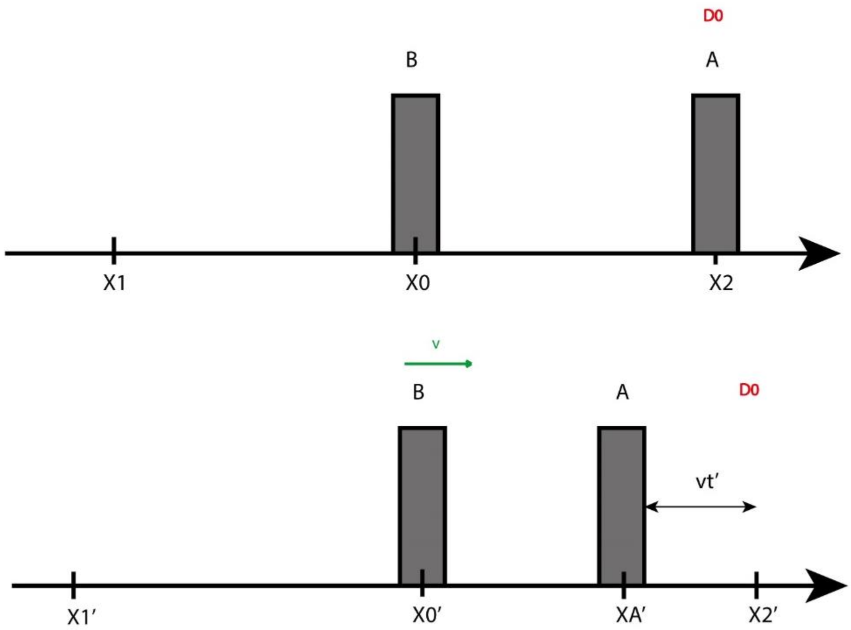
$$L2 = L1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{2}$$

Gdje je L1 vlastita duljina definirana kao duljina u sustavu u kojem početna i krajnja točka miruju. Slično se izvede i za preostale koordinate te v predstavlja komponentu brzine paralelnu s pravcem koji povezuje početnu i krajnju točku. Kontrakcija duljine nastaje zbog konačne brzine svjetlosti a samim time i informacije o lokaciji početne i krajnje točke. Često se uvodi pokrata

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{3}$$

2.3 Lorentzove transformacije

U prethodna dva primjera pokazana je ovisnost između vremenskih i prostornih u nekim posebnim slučajevima. U ovom poglavlju ćemo koristeći te koncepte izvesti prostorno-vremenske transformacije. Ono što želimo odrediti je koordinate događaja u različitim neinercijalnim sustavima. Promotrimo prvo 1D primjer. Zamislimo dva koordinatna sustava KS1 (S) i KS2 (S') kao na slici 3. Neka u prvom koordinatnom sustavu postoje promatrači na koordinatama x_1,x_2 i ishodištu x_0. Neka se promatrači ne gibaju relativno u odnosu na ishodište. Svi promatrači međusobno miruju što mogu i potvrditi Dopplerovim efektom. Promatrači mogu mjeriti međusobne udaljenosti u skladu s već navedenom metodom.



Slika 2.3. Lorentzove transformacije a.)KS1 gore b.)KS2 dolje

Promotrimo slučaj u kojem vrijedi da je :

$$x_1 = -x_2 \tag{4}$$

U skladu s kontrakcijom duljine promatrači mjere maksimalne (vlastite) duljine između sebe:

$$|x_1, x_0| = |x_0, x_2| = L = |x_1, 0| = |0, x_2| \tag{5}$$

Definirajmo sad pojam sinkronizacije vremena. Za lakše objašnjenje možemo dodati i pojam sata koji simbolizira mjereno vrijeme nekog promatrača od nekog proizvoljnog početnog vremenskog trenutka. Dva promatrača sinkroniziraju vrijeme u sljedećim koracima:

1.) Odabiru vrijeme sinkronizacije (npr. 12:00h)
2.) Jedan od promatrača šalje signal (svjetlosnu zraku) za sinkronizaciju i broji vrijeme od trenutka slanja Δt.
3.) Drugi promatrač po primitku zrake postavlja svoj sat na vrijeme sinkronizacije (12:00) i reflektira signal nazad prvom promatraču.
4.) Prvi promatrač prima reflektiranu zraku (u 12:00 + Δt)postavlja svoj sat na $\Delta t/2$ od vremena sinkronizacije

U skladu s navedenim postupkom sva tri promatrača u sustavu KS1 sinkroniziraju svoje satove. Kako nema relativnog gibanja sinkronizacijski signal će doći do drugog promatrača od prvog točno za pola vremena tako da će oba sata pokazivati isto vrijeme. Iz tog razloga sva tri promatrača u KS1 nakon sinkronizacije pokazuju isto vrijeme. Možemo zaključiti da svi sustavi koji se ne gibaju relativno u odnosu na KS1 odnosno imaju različita ishodišta mjere isto vrijeme što vrijedi i za svaki proizvoljni koordinatni sustav.

Promotrimo sad drugi sustav KS2 koji se giba u odnosu na KS1 brzinom v pozitivnom smjeru x osi. Neka se njegovo ishodište u trenutku t_0’ nalazi u ishodištu koordinatnog sustava KS1. Zbog preglednosti slike KS2 crtamo ispod KS1. Promatrač iz ishodišta u trenutku t_0’ može provesti postupak sinkronizacije s promatračem u ishodištu KS1. Kako se nalaze u istoj točci u skladu s postupkom sinkronizacije svjetlosni signal sinkronizacije dolazi trenutno između njih pa nakon sinkronizacije pokazuju isto vrijeme. Zbog jednostavnosti možemo odabrati početak mjerenja vremena u $t_{0'} = t_0 = 0$.

Uzmimo da se u sustavu KS1 na koordinati x_2 nalazi predmet A koji se relativno ne giba u odnosu na ishodište. Neka se na položaju tog predmeta u trenutku t=0 odvije događaj D0 (npr. paljenje svijetla). Možemo postaviti i predmet B u ishodište KS1. Predmete postavljamo samo da vidimo razliku u odnosu koordinata stacionarni predmet i koordinata događaja .

Kako su ishodišta sustava prostorno i vremenski sinkronizirana u $t_{0'} = t_0 = 0$ predmet B se i u sustavu KS2 u tom trenutku nalazi na koordinati ishodišta. Predmet A se nalazi na nekoj koordinati x_A' koja je određena kontrakcijom duljine:

$$x_A' = \frac{x_2}{\gamma} \tag{6}$$

Zbog kontrakcije duljine u KS2 se koordinatne osi kontraktiraju za faktor γ. U skladu s I u oba sustava opisujemo isti događaj pa je :

$$x_2' = \gamma x_2 \tag{7}$$

Važno je naglasiti da se koordinata x_2 giba u KS2 brzinom -v a miruje u KS1 . Dok absolutni prostorni položaj događaja D0 miruje u oba sustava. Odosno njegov međuodnos s okolinom je jednak. Događaj je vezan za okolinu u skladu s (I). Zamislimo događaj u kojem metak pogađa neku metu u skladu s (I) u svim koordinatnim sustavima on se mora dogoditi na istom položaju kao i meta. Predmet A se giba u KS2 i u $t_0'=0$ ne nalazi na prostornim koordinatama događaja pa možemo zaključiti u skladu s navedenim da se događaj nije odvio u $t_0'=0$. Događaj se odvio onda kad je predmet A bio u koordinati x_2' i za to vrijedi :

$$vt' = x_A' - x_2' = \frac{x_2}{\gamma} - x_2\gamma = -x_2\gamma\frac{v^2}{c^2} \tag{8}$$

Odnosno :

$$t' = -x_2\gamma\frac{v}{c^2} \tag{9}$$

(9) i (7) općenito za događaj koji se odvio u $t_0 \neq 0$ već u nekom trenutku t na koordinati x opisan je u sustavu S' sa sljedećim koordinatama :

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{10}$$

$$t' = \gamma(t - x\frac{v}{c^2}) \tag{11}$$

Gdje je u (10) koordinata x samo translatirana za -vt odnosno x' za -γvt a u (11) na vremensku razliku uslijed sinkronizacije ishodišta nadodana i vremenska razlika uslijed dilatacije vremena.

Nakon nešto matematičkog računa mogu se izvesti i inverzne transformacije:

$$x = \gamma(x' + vt) \tag{12}$$

$$t = \gamma(t + x\frac{v}{c^2}) \tag{13}$$

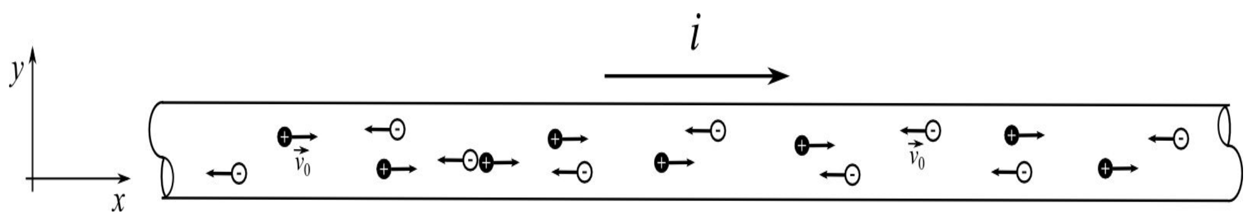
Transformacije 10-13 nazivaju se Lorentzove transformacije i promatranje se može poopćiti na sve tri dimenzije. Iz njih se relativno lako matematičkim alatom mogu dobiti ostale veličine relativističke mehanike uz primjenu matematičkog oblika II postulata odnosno invarijante ovih transformacija koja je posredno sadržana u prethodnim izvodima. Deriviranjem 3D Lorentzovih transformacija se lako dolazi do izraza za transformaciju brzinu i sila. Kompaktniji zapis ovih načela i izvoda se može postići u matematičkom prostoru četvero-vektora gdje su norme vektora definirane preko invarijante na Lorentzove transformacije (II. postulat).

3. GIBANJE NABOJA U ELEKTROMAGNESKOM POLJU VODIČA

U ovom poglavlju izvest ćemo izraz za silu vodiča (više naboja u gibanju) na naboj u gibanju u različitim koordinatnim sustavima. Prvo će se u 3.1 izvesti izraz za teorijski slučaj iz [2] koji je baziran na izvodima iz [3] i [4]. U poglavlju 3.2 izvest će se sila vodiča na naboj a u obzir će se uzeti fizika gibanja naboja u vodiču.

3.1 Teorijski slučaj

U ovom primjeru promotrit ćemo slučaj sa slike 3.1. Zamislimo sustav S vodiča u kojem se pozitivni naboji linijske gustoće λ gibaju u smjeru pozitivne x-osi brzinom v_0 a negativni naboji linijske gustoće $-\lambda$ u smjeru negativne x-osi jednakim iznosom brzine v_0. Uz ovako definiran problem ne postoji sustav u kojem bi svi naboji mirovali. Sustav S je jedini simetričan sustav u kojem je vodič neutralan. U tom sustavu ukupna linijska gustoća je jednaka nuli.



Slika 3.1 Struja u vodiču iz S [2]

Promotrimo sad neki naboj q koji se u sustavu S giba nekom brzinom v u smjeru pozitivnog dijela osi x. Definirajmo sustav S' u kojem naboj q miruje. U tom sustavu zbog različitih brzina naboja i kontrakcije duljine odnosno razmaka između tih naboja vodič više nije neutralan. Kako vodič nije neutralan naboj q u S' osjeća silu uslijed električnog polja. Uz izraz za transformaciju brzina:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \tag{1}$$

Gdje je u brzina čestice u S,u' u S', a v brzina između sustava S i S'.

U našem slučaju iznosi brzina naboja u S' su :

$$v'_+ = \frac{v_0 - v}{1 - \frac{vv_0}{c^2}} \tag{2}$$

$$v'_- = \frac{-v_0 - v}{1 - \frac{v(-v_0)}{c^2}} = -\frac{v_0 + v}{1 + \frac{vv_0}{c^2}} \tag{3}$$

Uvest ćemo sljedeće pokrate:

$$\begin{gathered}
\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
\beta_0 = \frac{v_0}{c} \qquad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \\
\beta'_\pm = \frac{v_\pm}{c} \qquad \gamma'_\pm = \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2_\pm}} \\
\beta'_+ = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0\beta} \qquad \beta'_- = -\frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0\beta}
\end{gathered} \tag{4}$$

Kako bismo direktno mogli koristiti izraze za kontrakciju duljine (vrijede samo pri prelasku iz sustava koji mjeri vlastito vrijeme) odredit ćemo prvo linijsku gustoću pozitivnih i negativnih naboja u njima pripadnim mirujućim sustavima. Definirajmo sustav S_+'' u kojem pozitivni naboji miruju. Razmak između naboja vodiča u sustavu S_+'' je maksimalan i može se izračunati kao

$$L''_+ = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \tag{5}$$

Pa je linijska gustoća u S_+'':

$$\lambda''_+ = \frac{Q}{L''} = \frac{Q}{L}\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} = \frac{\lambda}{\gamma_0} \tag{6}$$

Slično se dobije za negativne naboje:

$$\lambda''_{-} = -\lambda''_{+} \tag{7}$$

Sad možemo izračunati linijske gustoće u S' kao :

$$\lambda'_{+} = \gamma'_{+}\frac{\lambda}{\gamma_0} \tag{8}$$

$$\lambda'_{-} = -\gamma'_{-}\frac{\lambda}{\gamma_0} \tag{9}$$

Sad je ukupna gustoća u sustavu S':

$$\begin{aligned}
\lambda'_{uk} &= \lambda'_{+} + \lambda'_{-} = \gamma'_{+}\frac{\lambda}{\gamma_0} - \gamma'_{-}\frac{\lambda}{\gamma_0} = \\
&= \frac{\lambda}{\gamma_0}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2_{+}}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2_{+}}{c^2}}}\right] \\
&= \frac{\lambda}{\gamma_0}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2_{+}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2_{-}}}\right] = \cdots \\
&= -2\lambda\beta\beta_0\gamma = -\frac{2\lambda\gamma v v_0}{c^2}
\end{aligned} \tag{10}$$

Gdje su u predzadnjem retku $\beta'_{\pm}$ razvijeni preko $\beta_0\ i\ \beta\ iz\ (4)$.

Sad je električno polje u sustavu S' okomito na vodič i ako uzmemo da je y os u ravnini naboja i vodiča vrijedi :

$$E'_y = \frac{\lambda'_{uk}}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{11}$$

Polje je radijalno simetrično.

Sila na naboj u S' je :

$$F'_y = \frac{q\lambda'_{uk}}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{12}$$

A uz izraz za transformaciju komponente sile iz S sustava u S' okomite na smjer gibanja:

$$F' = \frac{F}{\gamma(1-\frac{uv}{c^2})} \tag{13}$$

Zanima nas transformacija iz S' u S pa je uz $v_{naboja}=0$ u S' sila F_y jednaka :

$$F_y = \frac{F'_y}{\gamma(1 - \frac{0v}{c^2})} = \frac{F'_y}{\gamma} = \frac{q\lambda v v_0}{\pi\varepsilon_0 c^2 r} \tag{14}$$

U sustavu S mjerimo ukupnu struju :

$$I = \lambda v_0 + (-\lambda)(-v_0) = 2\lambda v_0 \tag{15}$$

Pa (14) postaje :

$$F_y = \frac{qvI}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r} \tag{16}$$

Uz definiciju nove veličine :

$$B = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{17}$$

Sila u sustavu S postaje:

$$F_y = qvB \tag{18}$$

Veličina B se može izračunati iz Ampere-ovog zakona.

Pokazali smo da je magnetska sila odnosno magnetsko polje posljedica relativistički efekata. Primjenom izraza za magnetsku silu i amper-ovog zakona daju dobro rješenje samo za jedan sustav. Za ponašanje u ostalim sustavima potrebno je koristiti transformacije koje slijede iz STR.

3.2 Realni slučaj

Promotrimo sad neki stvarni vodič u laboratorijskom sustavu S_L. Neka vodič miruje u tom sustavu. Kad narinemo neki napon elektroni u vodiču se počnu gibati. Gibanje elektrona je opisano superpozicijom nasumičnog gibanja opisanog kvantnom mehanikom i usmjerenog gibanja uslijed narinutog napona odnosno pod djelovanjem električnog polja. Brzina nasumičnog gibanja je reda 10^5 m/s dok je driftna brzina tipično manja od 1mm/s. Unatoč tome ako usrednjimo to gibanje na sve elektrone u vodiču, komponenta uzrokovana nasumičnim gibanjem zbog nasumičnosti iščezava, a gibanje uslijed električnog polja se može usrednjeno gledati kao da se svi elektroni gibaju nekom brzinom koja se naziva driftna brzina. Ona ovisi o iznosu električnog polja i svojstvima samog materijala. U ovom razmatranju uzet ćemo pojednostavljeni model gdje se pri protjecanju struje svi elektroni gibaju driftnom brzinom. Pozitivni naboji u normalnim okolnostima (vodič se nije otopio ili prešao u stanje plazme) miruju.

U laboratorijskom sustavu vodič miruje. Kad narinemo napon pozitivni naboji (ioni) ostanu mirovati a elektroni se gibaju driftnom brzinom iznosa v_D. Uzmimo da je napon takav da se elektroni kao u prethodnom poglavlju gibaju u smjeru negativne x osi. Zanima nas sila u laboratorijskom sustavu između ovog vodiča i nekog naboja koji se u laboratorijskom sustavu giba brzinom v_{qL} u pozitivnom smjeru x osi. Možemo primijetiti da problem nije ekvivalentan prethodnom. U ovom slučaju u laboratorijskom sustavu vodič nije neutralan.

Želimo prijeći u sustav koji je neutralan jer samo u njemu vrijedi izraz za magnetsku silu. Prelazimo u sustav S koji je neutralan i giba se s nekom brzinom v_0 u smjeru negativne x osi a uvjet je da je :

$$v_+ = -v_- \tag{19}$$

i:

$$v_+ = v_0 \tag{20}$$

$$v_- = \frac{-v_D - v_0}{1 - \frac{v_0(-v_D)}{c^2}} = -\frac{v_D + v_0}{1 + \frac{v_0 v_D}{c^2}} \tag{21}$$

Iz (19-21) slijedi kvadratna jednadžba

$$-\frac{v_D}{c^2}v_0^2 + 2v_0 - v_D = 0 \tag{22}$$

Kako je brzina v_D jako mala reda par mm/s a v_0 još manja od nje možemo za rješenje uzeti aproksimaciju bez prvog člana u (22) pa imamo ne-relativističko rješenje:

$$v_0 = \frac{v_D}{2} \tag{23}$$

Sada je u tom sustavu brzina naboja :

$$v = \frac{v_{qL} - v_0}{1 - \frac{v_0 v_{qL}}{c^2}} \tag{24}$$

U ovom S sustavu u skladu s izvodom u 3.1 vrijedi izraz za silu :

$$F_y = \frac{q\lambda v v_0}{\pi\varepsilon_0 c^2 r} \tag{25}$$

Odnosno:

$$F_y = qvB \tag{26}$$

Koristeći izraz za transformaciju sila (13) možemo odrediti silu na naboj u laboratorijskom sustavu.

$$Flab = \frac{F_y}{\gamma_0(1 - \frac{v v_0}{c^2})} \tag{27}$$

Linijska gustoća negativnih naboja u S_{lab} u skladu s (6) i (9) :

$$\lambda_{lab-} = -\frac{\lambda}{\gamma_0}\gamma_X \tag{28}$$

Gdje je:

$$\gamma_X = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_D}{c}\right)^2}} \tag{29}$$

Uz:

$$\alpha = \frac{1}{1 - \frac{\frac{v_D}{2} v_{qL}}{c^2}} \qquad i \qquad \delta = \frac{1}{1 - \frac{\frac{v_D}{2} v}{c^2}} \tag{30}$$

Sila u laboratorijskom sustavu je :

$$\begin{aligned} Flab &= \frac{q\gamma_0(-\lambda_{L-})\left(\frac{v_{qL} - \frac{v_D}{2}}{\alpha}\right)\left(-\frac{v_D}{2}\right)}{\gamma_0 \gamma_X \delta \pi \varepsilon_0 c^2 r} \\ &= \frac{q(-\lambda_{L-})\left(v_{qL} - \frac{v_D}{2}\right)\left(-\frac{v_D}{2}\right)}{\gamma_X \delta \alpha \pi \varepsilon_0 c^2 r} = \frac{q\left(v_{qL} - \frac{v_D}{2}\right) I}{2\gamma_X \delta \alpha \pi \varepsilon_0 c^2 r} \\ &= \frac{q\left(v_{qL} - \frac{v_D}{2}\right) B}{\gamma_X \delta \alpha} \end{aligned} \tag{31}$$

Korištenjem definicija pokrata (31) se može prikazati samo preko veličina mjerenih iz laboratorijskog sustava.

Uz definiciju struje i magnetskog polja mjerenih u laboratorijskog sustavu.

Kako je v_D<<c relativistički koeficijenti u nazivniku $\gamma_X\ i\ \delta\ i\ \alpha$ teže u jedan. Vrijedi:

$$Flab \approx q\left(v_{qL} - \frac{v_D}{2}\right) B \tag{32}$$

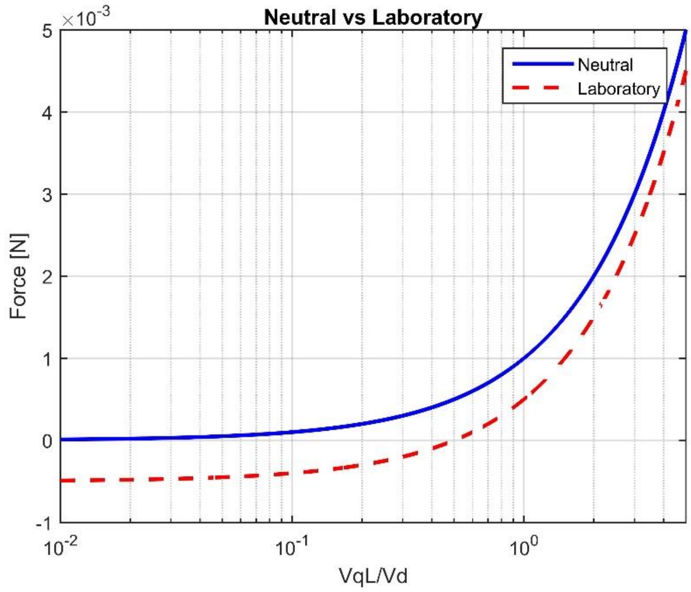
Ako koristimo silu iz neutralnog sustava u laboratorijskog pravimo apsolutnu grešku od :

$$\varepsilon = q v_{qL} B - q\left(v_{qL} - \frac{v_D}{2}\right) B = q\frac{v_D}{2} B \tag{33}$$

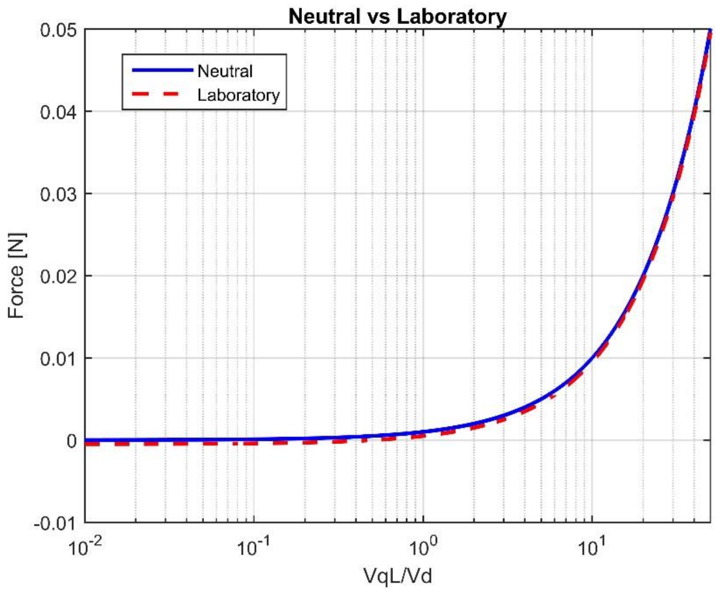
Apsolutna greška je konstanta u ovisnosti o v_{qL} ali će imati veći utjecaj za manje sile odnosno pri nižim brzinama naboja v_{qL}.

Slika 3.2 prikazuje usporedbu izraza (26) u neutralnom sustavu i izraza (32) u laboratorijskom sustavu za q=1C, $v_D = 1mm/s$ i B=1T u ovisnosti o iznosu brzine v_{qL} u odnosu na driftnu brzinu. Za jako male iznose brzine v_{qL} postoji zamjetna razlika. U području

$v_{qL} < \frac{v_D}{2}$ sile imaju čak različit predznak. Možemo vidjeti da za $v_{qL} >> v_D$ izraz (32) teži u izraz (26).



a.)



b.)

Slika 3.2 Usporedba sila u sustavu S_L a.) uvećano b.) umanjeno

4. ZAKLJUČAK

U ovom radu su direktno iz Einsteinovih postulata izvedene Lorentzove transformacije. Sila između vodiča i naboja u gibanju je izvedena iz specijalne teorije relativnosti za različite referentne sustave. Promatran je slučaj stvarnog vodiča (metala) u sustavu u kojem vodič miruje (laboratorijski sustav). Pokazano je da već za taj jednostavni slučaj ne vrijedi jednostavan oblik magnetske sile. Unatoč tome zbog jako malog iznosa driftne brzine u većini primjena izraz za silu u laboratorijskom sustavu se može poistovjetiti s jednostavnim izrazom za magnetsku silu. Za točniji izračun u prvoj aproksimaciji pri korištenju magnetske sile u laboratorijskom sustavu brzina gibanja naboja bi trebala biti reducirana za polovinu driftne brzine.

5. LITERATURA

[1] On the Electrodynamics of Moving Bodies A. Einstein June 30, 1905

[2] Interna skripta s predavanja iz kolegija Opća fizika II, PMFST, Ante Bilušić, Predavanja, 2015

[3] Edward M. Purcell: Elektricitet i magnetizam, udžbenik fizike Sveučilišta u Berkeleyu, 2. svezak, Tehnička knjiga Zagreb, 1988.

[4] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sand, The Feynman Lectures on Physics, vol. I , 1970