Numeričko integriranje

Kubat, Marina

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

Marina Kubat

Numeričko integriranje

DIPLOMSKI RAD

Split, svibanj 2018.

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
MATEMATIČKI ODJEL

Numeričko integriranje

DIPLOMSKI RAD

Student(ica):
Marina Kubat

Voditelj:
Jurica Perić

Split, svibanj 2018.

Uvod

Numerička analiza ima veoma važnu ulogu u primjenjenoj matematici. Može se reći da je ona bazična disciplina za mnoga područja koja primjenjena matematika u svojoj cjelini obuhvaća. Ona je takodjer veoma stara grana matematike, ali se posebno intezivno počela razvijati nakon pojave kompjutera. Pojava kompjutera uvjetovala je razvoj mnogih disciplina unutar same numeričke analize, disciplina koje do tada i nisu bile podrobnije proučavane. Jedan od razloga zašto je nekada bilo tako možemo npr. naći u sljedećoj činjenici. Zamislimo da neki numerički postupak vodi na rješavanje sustava linearnih jednadžbi reda sto. Takav sustav u današnje vrijeme se smatra manjim sustavom, međutim nekada, kada nije bilo kompjutera, veoma teško da bi se netko upustio u njegovo rješavanje. Naime, za riješiti takav sustav Gaussovom metodom eliminacije potrebno je izvršiti više od 600 000 aritmetičkih operacija. Danas se to može izvršiti u vremenskom periodu manjem od sekunde.

Kvadratura je matematički povijesni pojam, a znači računanje površine. Kvadraturni problemi su bili glavni zadaci za matematičku analizu. Problem odredivanja površine likova u ravnini bio je poznat u Egiptu prije više od 4 000 godina. Oni su poznavali neke jednostavnije formule koje su kasnije preuzeli Grci te se među njima današnjem načinu traženja površine najviše približio Arhimed. On je skupom pravokutnika prekrivao traženu površinu ili u lik upisivao pravokutnike te zbrojem površina pravokutnika aproksimirao površinu lika. Upravno na toj ideji je Riemann zasnovao pojam odedenog integrala.

Sa otkrićem integralnog računa dobivena je opća metoda za računanje površine. Kao odgovor, izraz kvadratura je postao tradicionalan, a umjesto toga moderni naziv je "računanje određenog integrala".

Sadržaj

Poglavlje 1

1.1 Uvod o integriranju

Problem: Neka je zadana funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f(x) \geq 0$. Kako odrediti površinu omeđenu grafom funkcije f i x-osi?

Kako definirati površinu lika čije su stranice zakrivljene? Površinu ispod krivulje f možemo aproksimirati pravokutnicima i uzeti limes kada broj pravokutnika teži prema beskonačnosti.

Rješenje: Problem nalaženja površine ravninskog lika omeđenog krivuljom f i segmentom $[a, b]$ na x-osi možemo općenito formulirati na sljedeći način. Neka je f ograničena funkcija na intervalu $[a, b]$. **Particija ili rastav intervala** $[a, b]$ je skup točaka P koji označavamo sa

$$P : \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Označimo sa $\mathcal{D}$ skup svih rastava segmenta $[a, b]$. Neka je

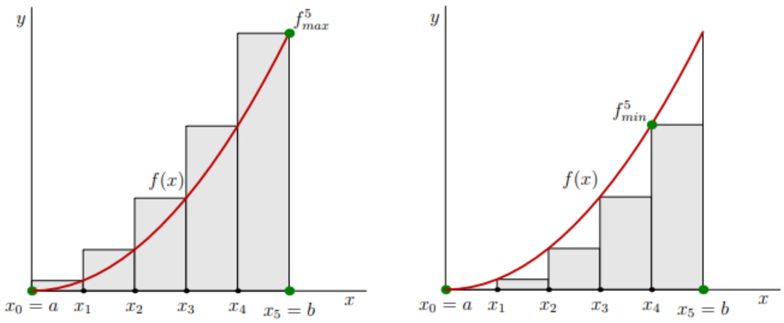
$$M_i = \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \quad m_i = \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

i definirajmo gornju i donju integralnu sumu sa

$$G(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad \text{gornja integralna suma,}$$

$$D(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad \text{donja integralna suma,}$$

gdje je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.



Slika 1.1: Gornja i donja integralna suma

Za svaki odabir točaka $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ definiramo **integralnu sumu** sa

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i.$$

Neka je

$$M = \max_{a \leq x \leq b} f(x), \quad m = \min_{a \leq x \leq b} f(x).$$

Primijenimo da vrijedi

$$m\Delta x_i \leq m_i \Delta x_i \leq f(z_i)\Delta x_i \leq M_i \Delta x_i \leq M\Delta x_i.$$

Iz ovoga slijedi

$$m(b-a) \leq D(f, P) \leq S(f, P) \leq G(f, P) \leq M(b-a)$$

za proizvoljnu particiju P na intervalu $[a, b]$.

Definicija 1 *Sa*

$$I^* = \inf \{G(f, P) : P \in \mathcal{D}\},$$

*označavamo **gornji Rimannov integral** funkcije f na intervalu $[a, b]$. Slično definiramo **donji Rimannov integral** sa*

$$I_* = \sup \{D(f, P) : P \in \mathcal{D}\}.$$

Za gornji i donji integral vrijedi

$$I_* \leq I^*.$$

Definicija 2 *Kažemo da je funkcija f integrabilna na intervalu $[a, b]$ u Riemannovom smislu ako je $I_* = I^*$. Riemannov integral označavamo sa*

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Zadana je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je I obično interval (može i beskonačan). Želimo izračunati integral funkcije f na intervalu $[a, b]$,

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx. \tag{1.1}$$

Deriviranje je (barem analitički) jednostavan postupak, dok integriranje nije, pa se integrali analitički u "lijepoj formi" mogu izračunati samo za malen skup funkcija f. Npr. jedan takav integral, koji ima veliku važnost za teoriju vjerojatnosti je $\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Zbog toga u većini slučajeva ne možemo iskoristiti osnovni teorem integralnog računa, tj. Newton-Leibnitzovu formulu za računanje $I(f)$ preko vrijednosti primitivne funkcije F od f u rubovima intervala.

Teorem 1 *(Newton-Leibnitzova formula) Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, i neka je F primitivna funkcija funkcije f. Tada je*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Primitivna funkcija funkcije f je ona funkcija F čija je prva derivacija jednaka f, tj.

$$F'(x) = f(x)$$

Međutim, dosta često ne moramo izračunati točnu vrijednost određenog integrala, nego nam je dovoljno približno izračunati vrijednost integrala $I(f)$.

1.1.1 Uvod o numeričkom integriranju

Osnovna ideja numeričke integracije je izračunavanje $I(f)$ korištenjem vrijednosti funkcije f na nekom konačnom skupu točaka.

Opća integracijska formula ima oblik

$$I(f) = I_m(f) + E_m(f),$$

pri čemu je $m+1$ broj korištenih točaka, $I_m(f)$ pripadna aproksimacija integrala, a $E_m(f)$ napravljena greška. Ovakve formule za približnu integraciju funkcija jedne varijable (tj. na jednodimenzionalnoj domeni) često se zovu i **kvadraturne formule**, zbog interpretacije integrala kao površine ispod krivulje.

Ako koristimo samo funkcijske vrijednosti za aproksimaciju integrala, onda aproksimacija $I_m(f)$ ima oblik

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f(x_k^{(m)}), \tag{1.2}$$

pri čemu je m neki unaprijed zadani prirodni broj. Koeficijenti $x_k^{(m)}$ zovu se **čvorovi integracije**, a $w_k^{(m)}$ **težinski koeficijenti**.

Definicija 3 *Kažemo da je kvadraturna formula* ***egzaktna*** *za polinome $p(x)$ stupnja $\leq m$ ako je ostatak greške jednak nuli, tj. $E_m(f) = 0$, tj.*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f(x_k^{(m)}),$$

za sve polinome stupnja $\leq m$. Broj m izražava preciznost te formule.

U općem slučaju, za fiksni m, moramo nekako odrediti $m + 1$ nepoznatih koeficijenata. Uobičajen način njihovog određivanja je zahtjev da su integracijske formule egzaktne na vektorskom prostoru **polinoma** što višeg stupnja. Ako postoji Taylorov red za fukciju f i ako on konvergira, onda bi to značilo da integracijska formula egzaktno integrira početni komad Taylorovog reda, tj. Taylorov polinom. Drugim riječima, greška bi bila mala, tj. jednaka integralu greške koji nastaje kad iz Taylorovog reda uzmemo Taylorov polinom.

Definicija 4 *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija klase $C^\infty(I)$ definirana na otvorenom intervalu $I \subset \mathbb{R}$ i neka je $c \in I$. Red potencija*

$$T[f, c] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

zovemo ***Taylorov red*** *funkcije f oko točke c.*

Definicija 5 *Neka funkcija f zadana na otvorenom intervalu I ima $(n+1)$ derivaciju u točki $x_0 \in I$.* ***Taylorov polinom n-tog stupnja*** *funkcije f u okolini točke x_0 glasi:*

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

gdje je $R_n(x)$ ostatak reda dan sa

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

za neku točku $\xi \in (x, x_0)$.

Definicija 6 *Neka je $k \in \mathbb{N}$. Funkcija f je* ***klase*** *C^k na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako $f^{(k)}$ postoji na I i neprekidna je na I i pišemo $f \in C^k(I)$.*

Zbog linearnosti integrala kao funkcionala

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx, \tag{1.3}$$

dovoljno je gledati egzaktnost tih formula na nekoj bazi vektorskog prostora, recimo na

$$\left\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^m, \dots\right\},$$

jer svojstvo (1.3) onda osigurava egzaktnost za sve polinome do najvišeg stupnja baze.

Ako su čvorovi ekvidistantni, onda dobivamo tzv. **Newton-Cotesove formule**, koje se obično aproksimiraju Lagrangeovim interpolacijskim polinomom.

Ako fiksiramo samo neke čvorove, ili dozvolimo da su svi čvorovi "slobodni", takve formule zovu se **formule Gaussovog tipa**. U slučaju Gaussovih formula (ali može se i kod težinskih Newton-Cotesovih formula) uobičajno je (1.1) zapisati u obliku

$$I(f) = \int_a^b w(x)f(x)dx,$$

pri čemu je $w \geq 0$ težinska funkcija.

Interpolacija polinomima

Što je problem **aproksimacije**? Ako su poznate neke informacije o funkciji f, definiranoj na nekom skupu $X \subseteq \mathbb{R}$, na osnovu tih informacija želimo f zamijeniti nekom drugom funkcijom φ na skupu X. Skup X je najčešće interval oblika $[a, b]$ (može biti neograničen), ili diskretni skup točaka.
Diskretan skup je skup za kojeg vrijedi $\forall n \in X \; \{p \in X : n < p < n+1\}$.

Interpolacija je zahtjev da se vrijednosti funkcija f i φ podudaraju na nekom konačnom skupu točaka. Te točke nazivamo **čvorovima** interpolacije.

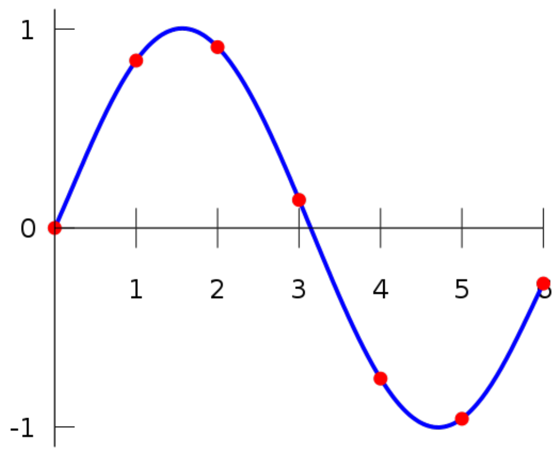
Pretpostavimo da imamo funkciju f zadanu na diskretnom skupu različitih točaka $x_k, k = 0, \ldots, n$, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$. Poznate funkcijske vrijednosti u tim točkama skraćeno označavamo s $f_k = f(x_k)$.

Teorem 2 *(Egzistencija i jedinstvenost interpolacijskog polinoma) Neka je $n \in \mathbb{N}_0$. Za zadane točke $(x_k, f_k), k = 0, \ldots, n$, gdje je $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$, postoji jedinstveni (interpolacijski) polinom stupnja najviše n*

$$\varphi(x) := p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

za koji vrijedi

$$p_n(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n.$$



Slika 1.2: Intepolacija polinomom kroz skup točaka

Interpolacijski polinom L_n u Lagrangeovom obliku glasi

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) f_k \tag{1.4}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} p_k(x) &:= \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)} \\ &= \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} \\ &= \prod_{i=0,i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}, \end{aligned}$$

i vrijedi

$$p_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}, \quad i,j = 0,1,2,\dots,n.$$

Uvrstimo li to u (1.4) slijedi

$$L_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x_j) f_i = \sum_{i=0}^{n} \delta_{ij} f_i = f_j, \quad j = 0,1,2,\dots,n.$$

Možemo staviti

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + E_n(f),$$

gdje je $E_n(f)$ greška aproksimacije, pa je aproksimacija

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k),$$

gdje su w_k određeni sa

$$w_k = \int_a^b p_k(x)dx, \quad k = 0,1,\dots,n.$$

1.1.2 Greške u numeričkom računanju

Da bismo mogli ocjenjivati izračunava li neki algoritam traženo rješenje problema s dovoljnom točnošću, potrebno je znati pojmove apsolutne i relativne greške, greške unaprijed i unazad, stabilnosti algoritma, uvjetovanosti problema itd.

Apsolutna i relativna greška

Neka je $\hat{x}$ neka aproksimacija realnog broja x. Najkorisnije mjere za točnost broja $\hat{x}$ kao aproksimacije od x su apsolutna greška

$$G_{\text{aps}}(\hat{x}) = |x - \hat{x}|$$

i relativna greška

$$G_{\text{rel}}(\hat{x}) = \frac{|x - \hat{x}|}{|x|},$$

koja nije definirana za $x = 0$.

Relativna greška povezana je s brojem točnih značajnih znamenaka. Znašajne znamenke u broju su prve netrivijalne (tj. različite od nule) znamenke i one koje slijede iza njih u zapisu. Npr. u broju 6.9990 imamo pet značajnih znamenaka, dok ih u broju 0.0832 imamo tri. Što znači broj točnih značajnih znamenaka? Npr. ako je

$$x = 1.00000, \quad \hat{x} = 1.00499, G_{\text{rel}} = 4.99 \cdot 10^{-3}$$

$$x = 9.00000, \quad \hat{x} = 8.99899, G_{\text{rel}} = 1.12 \cdot 10^{-4}$$

vidimo da se $\hat{x}$ slaže s odgovarajućim x na tri značajne znamenke, a ipak je relativna greška za ta dva slučaja različita čak za faktor 44.

Točnost se odnosi na apsolutnu ili relativnu grešku kojom se aproksimira neka veličina. **Preciznost** je točnost kojom se izvršavaju osnovne računske operacije.

1.2 Newton-Cotesove formule

Newton-Cotesove formule zatvorenog tipa imaju ekvidistantne čvorove, s tim da je prvi čvor točka $x_0 := a$, a posljednji $x_m := b$. Preciznije, za zatvorenu Newton-Cotesovu formuli s m+1 točaka čvorovi su

$$x_k^{(m)} = x_0 + kh_m, k = 0, \ldots, m, h_m = \frac{b-a}{m}.$$

Osnovni oblik Newton-Cotesovih formula je:

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f(x_0 + kh_m). \tag{1.5}$$

1.2.1 Trapezna formula

Izvedimo najjednostavniju Newton-Cotesovu formulu, za $n = 1$. Prisjetimo se da Lagrangeov interpolacijski polinom $L_1(x)$ ima oblik

$$L_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

Graf gornje funkcije je pravac koji prolazi kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Sam polinom daje aproksimaciju funkcije $f(x)$ na segmentu $[a, b]$. Što je $h = b - a$ manje, to je ta aproksimacija bolja. Zato možemo pisati

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_1(x)dx. \tag{1.6}$$

Izračunajmo sada

$$\int_a^b \frac{x-b}{a-b}dx = \frac{1}{a-b}\int_a^b (x-b)dx = \frac{1}{a-b}\left[\int_a^b xdx - \int_a^b bdx\right]$$
$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_a^b - b\cdot x\Big|_a^b\right] = \frac{1}{a-b}\left[\frac{b^2-a^2}{2} - b(b-a)\right]$$
$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{-(a-b)(a+b)}{2} - b(b-a)\right] = -\frac{a+b}{2}+b = \frac{-b-a+2b}{2} = \frac{b-a}{2} = \frac{h}{2}$$

Analogno izračunamo

$$\int_a^b \frac{x-a}{b-a}dx = \frac{h}{2}.$$

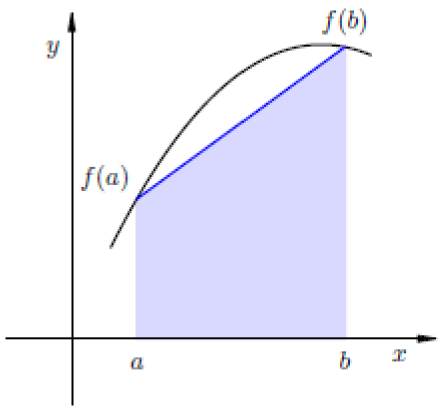
Ako to uvrstimo u (1.6) dobivamo

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}h.$$

Ta formula se zove **trapezna formula**. Ako je napišemo u obliku

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

odmah ćemo vidjeti da je $(f(a)+f(b))/2$ srednjica, a $b-a$ visina trapeza sa slike.



Greška trapezne formule

Prije same greške trapezne formule pogledajmo teorem o ocjeni greške interpolacijskog polinoma:

Teorem 3 *Pretpostavimo da funkcija f ima* $(n+1)$*-u derivaciju na segmentu* $[a,b]$ *za neki* $n \in \mathbb{N}_0$*. Neka su* $x_k \in [a,b], k = 0, \ldots, n$*, međusobno različiti čvorovi interpolacije, tj.* $x_i \neq x_j$ *za* $i \neq j$*, i neka je* p_n *interpolacijski polinom za funkciju* f *u tim čvorovima. Za bilo koju točku* $x \in [a,b]$ *postoji točka* ξ *iz otvorenog intervala*

$$x_{\min} := \min\{x_0, \ldots, x_n, x\} < \xi < \max\{x_0, \ldots, x_n, x\} =: x_{\max}$$

takva da za grešku interpolacijskog polinoma vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x),$$

pri čemu je $\omega(x)$ *definirana relacijom*

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k).$$

$\square$

Neka je funkcija $f \in C^2([a,b])$. Greška interpolacijskog polinoma stupnja 1 koji funkciju f interpolira u točkama $(a, f(a)), (b, f(b))$ na intervalu $[a,b]$ jednaka je

$$e_1(x) = f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b),$$

gdje je $\xi \in (a,b)$. Slijedi

$$E_1(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)dx.$$

Očito vrijedi

$$\frac{(x-a)(x-b)}{2} \leq 0 \quad \text{za } x \in [a,b]\,,$$

pa možemo uzeti

$$w(x) = -\frac{(x-a)(x-b)}{2}, \quad g(x) = -f''(\xi).$$

Teorem 4 (Teorem o integralnoj srednjoj vrijednosti) *Neka je w nenegativna i integrabilna funkcija na segmentu $[a, b]$. Neka je g neprekidna na $[a, b]$. Tada postoji točka $\xi \in [a, b]$ takva da je*

$$\int_a^b g(x)w(x)dx = g(\xi)\int_a^b w(x)dx.$$

$\square$

Po Teoremu o integralnoj srednjoj vrijednosti, ako je $f \in C^2([a, b])$, (što znači da je $f'' \in C^0([a, b])$), vrijedi da postoji $\zeta \in [a, b]$ takav da vrijedi

$$E_1(f) = -f''(\zeta)\int_a^b -\frac{(x-a)(x-b)}{2}dx.$$

Integriranjem dobivamo

$$\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2}dx = -\frac{(b-a)^3}{12} = -\frac{h^3}{12},$$

pa je

$$E_1(f) = -f''(\zeta)\frac{h^3}{12},$$

gdje je $\zeta \in [a, b]$.

Primjer 1 *Koristeći trapeznu formulu približno izračunajte vrijednost integrala*

$$\int_0^2 (0.2 + 25x)dx.$$

Rješenje: $f(a) = f(0) = 0.2$, $f(b) = f(2) = 50.2$, pa je

$$I = (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2} = (2-0)\frac{0.2+50.2}{2} = 50.4,$$

a prava vrijednost integrala iznosi

$$\int_0^2 0.2 + 25x = (0.2x + 12.5x^2)|_0^2 = (0.2 \cdot 2 + 12.5 \cdot 2^2) - 0 = 50.4$$

Kako je podintegralna funkcija linearna, koristeći trapeznu formulu dobivamo jednako rješenje, iz razloga jer trapezna formula egzaktna na svim polinomima stupnja manjeg ili jednakog 1.
Dovoljno je uzeti $f(x) = 1$ i $f(x) = x$ i uvjeriti se da je $E_1(f) = 0$.
Dokaz Druga derivacija funkcije $f(x) = 1$ iznosi nula pa je i greška trapezne formule nula. Analogno i za $f(x) = x$, vrijedi $f''(x) = 0$, pa je $E_1(f) = 0$.

□

Primjer 2 *Koristeći trapeznu formulu približno izračunajte vrijednost integrala*

$$\int_a^b (0.2 + 25x + 3x^2)dx.$$

Rješenje: $f(x) = 0.2 + 25x + 3x^2$, $f(0) = 0.2$ i $f(2) = 62.2$.

$$I = (b-a)\frac{f(b) + f(a)}{2} = (2-0)\frac{0.2 + 62.2}{2} = 62.4.$$

Pravo rješenje je

$$\int_0^2 f(x)dx = (0.2 + 12.5x^2 + x^3)|_0^2 = (0.2 \cdot 2 + 12.5 \cdot 2^2 + 2^3) - 0 = 58.4.$$

Apsolutna greška iznosi

$$\Delta = |62.4 - 58.4| = 4.$$

Dakle, trapezna formula neće egzaktno integrirati sve polinome stupnja 2. Slično kao i u prošlom primjeru, za

$$f(x) = x^2$$

vrijedi

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2 dx \neq I_1(x^2) = \frac{a^2 + b^2}{2}(b-a).$$

□

1.2.2 Peanov teorem o jezgri

Definicija 7 *Neka funkcija f ima neprekidne derivacije do uključivo reda $n+1$, na intervalu $[a,b]$. Tada vrijedi* ***Taylorova formula*** *funkcije f sa integralnim oblikom ostatka*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &+ \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt. \end{aligned} \tag{1.7}$$

$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$ *zove se* ***Peanov oblik ostatka***.

Neka je $f \in C^{n+1}([a,b])$. Po Taylorovoj formuli vrijedi

$$f(x) = p(x) + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt,$$

gdje je $p \in P_n$. Neka je $E(f)$ greška aproksimacijske formule. E je linearan operator, tj. vrijedi

$$\begin{aligned} E(f+g) &= E(f) + E(g), \\ E(\lambda f) &= \lambda E(f). \end{aligned}$$

Formula (1.7) nam daje izraz za grešku koja ovisi o $f^{(n+1)}$

$$E(f) = \frac{1}{n!}E\left\{\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\right\}, \quad x \in [a,b].$$

Kako bi granice integracije bile neovisne o x, uvodimo oznake

$$(x-t)_+^n = \begin{cases} (x-t)^n, & x > t \\ 0 & x \le t \end{cases} \quad \text{gdje je} \quad E(f) = \frac{1}{n!}E\left\{\int_a^b (x-t)_+^n f^{(n+1)}(t)dt\right\}.$$

Označimo sa $K(t) = E[(x-t)_+^n]$ za $x \in [a,b]$. Funkcija K se naziva **Peanova jezgra** od E. Uz pretpostavku da je dopušteno zamijeniti redoslijed djelovanja $\int$ i E, te zbog linearnosti operatora E, vrijedi

$$E(f) = \frac{1}{n!}\int_a^b K(t) f^{(n+1)}(t)dt. \tag{1.8}$$

Teorem 5 *Neka je $E(p) = 0$ za sve polinome $p \in P_n$ i neka je $f \in C^{n+1}([a,b])$. Tada se ostatak $E(f)$ može reprezentirati kao (1.8).*

□

Računanje Peanovih jezgri može biti vrlo komplicirano, stoga ćemo navesti samo jedan jednostavan primjer kako bismo bolje objasnili postupak.

Primjer 3 *U prethodnoj cjelini smo konstruirali metodu trapezne formule*

$$I(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)),$$

i dali ocjenu pogreške za nju, koja je glasila $E_1(f) = -f''(\zeta)\frac{h^3}{12}$, gdje je $\zeta \in [a,b]$.

Ova formula egzaktno integrira sve linerane polinome, pa uzimamo $n = 1$. U tom slučaju imamo

$$\begin{aligned} K(t) = E[(x-t)_+] &= \int_a^b (x-t)_+ dx - I((x-t)_+) \\ &= \int_t^b (x-t)dx - I((x-t)_+) \\ &= \left.\frac{(x-t)^2}{2}\right|_t^b - \frac{b-a}{2}((a-t)_+ + (b-t)_+) \\ &= \frac{(b-t)^2}{2} - \frac{(b-a)(b-t)}{2} \\ &= \frac{(b-t)(a-t)}{2}, \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je $(a-t)_+ = 0$ kad je $a \leq t$ za svaki $t \in [a,b]$ i $(b-t)_+ = b-t$ kad je $b > t$ za svaki $t \in [a,b]$.
Za funkciju K vrijedi $K(t) \leq 0$, jer je za $t \in [a,b], b-t \geq 0$ i $a-t \leq 0$, pa funkcija K ne mijenja predznak na $[a,b]$ i možemo iskorititi teorem o integralnoj srednjoj vrijednosti.
Slijedi

$$\begin{aligned} E(f) &= \frac{1}{1!}\int_a^b f''(t)K(t)dt \\ &= f''(\zeta)\int_a^b K(t)dt, \end{aligned}$$

za neki $\zeta \in [a,b]$. Zatim

$$\int_a^b K(t)dt = \int_a^b \frac{(b-t)(a-t)}{2}dt = -\frac{1}{12}(b-a)^3.$$

Zaključujemo da je greška trapezne formule jednaka

$$E(f) = -\frac{1}{12}f''(\zeta)(b-a)^3.$$

Dobili smo istu ocjenu pogreške kao i u prethodnom poglavlju.

1.2.3 Simpsonova formula

Sada ćemo podintegralnu funkciju zamjeniti funkcijom čiji je graf parabola na segmentu $[x_0, x_2]$, odnosno Lagrangeovim interpolacijskim polinomom $L_2(x)$,

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2),$$

gdje je $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ i $x_2 = b$. Kao i u trapeznom pravilu, ako je h dovoljno malo, vrijedi

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} L_2(x)dx.$$

Sada računamo

$$\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}dx = ... = \frac{h}{3},$$

$$\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}dx = 4\frac{h}{3},$$

$$\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{h}{3}.$$

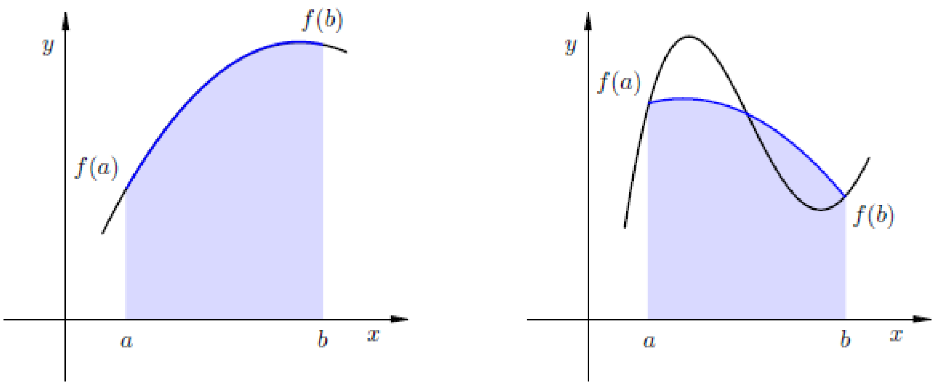
Ako to uvrstimo u gornju formulu dobivamo

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)],$$

odnosno, integracijska formula $I_2(f)$ glasi

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Ilustrirajmo kako Simpsonova formula funkcionira na integralu kojeg smo aproksimirali trapeznom formulom



Na prvoj slici aproksimacija integrala je vrlo dobra, dok ovisno o "obliku" funkcije f (kao na drugoj slici), aproksimacija ne mora biti tako dobra.

Greška Simpsonove formule

Polazeći od Peanovog teorema o jezgri izvodimo grešku Simponove formule koja glasi

$$I(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Simpsonova formula je egzaktna za polinome stupnja 3, pa za $n = 3$ imamo

$$E(f) = \frac{1}{3!}\int_a^b f^{(4)}(t)K(t)dt,$$

gdje je $K(t) = E[(x-t)^3_+]$.

$$\begin{aligned}
K(t) = E[(x-t)^3_+] &= \int_a^b (x-t)^3_+ - I((x-t)^3_+) \\
&= \left.\frac{(x-t)^4}{4}\right|_t^b - \frac{b-a}{6}\left((a-t)^3_+ + 4\left(\frac{a+b}{2} - t\right)^3_+ + (b-t)^3_+\right) \\
&= \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{b-a}{6}\left(4\left(\frac{a+b}{2} - t\right)^3_+ + (b-t)^3_+\right),
\end{aligned}$$

jer je $(a-t)^3_+ = 0$ za $t \in [a,b]$. Funkcija K ne mijenja predznak za $t \in [a,b]$, pa možemo iskoristiti teorem o integralnoj srednjoj vrijednosti. Dakle, postoji $\zeta \in [a,b]$, tako da je

$$E(f) = \frac{1}{3!}\int_a^b f^{(4)}(t)K(t)dt = \frac{1}{3!}f^{(4)}(\zeta)\int_a^b K(t)dt.$$

Kada integriramo $K(f)$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_a^b K(t)dt &= \int_a^b \frac{(b-t)^4}{4}dt - \frac{b-a}{6}\int_a^b \left(4\left(\frac{a+b}{2} - t\right)^3_+ - (b-t)^3_+\right)dt \\
&= \left.\frac{(b-t)^5}{20}\right|_a^b - \frac{b-a}{6}\left[4\int_a^{(a+b)/2}\left(\frac{a+b}{2} - t\right)^3 dt + \int_a^b (b-t)^3 dt\right] \\
&= \left.\frac{(b-t)^5}{20}\right|_a^b - \frac{b-a}{6}\left[4\frac{(b-a)^4}{64} - \frac{(b-a)^4}{4}\right] \\
&= \frac{(b-a)^5}{20} - \frac{(b-a)^5}{96} + \frac{(b-a)^5}{24} \\
&= -\frac{(b-a)^5}{480}
\end{aligned}$$

Kada ovo uvrstimo u izraz za E, slijedi

$$E(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta).$$

Primjer 4 *Koristeći Simpsonovu formulu približno izračunajte vrijednost integrala*

$$\int_0^2 (0.2 + 25x + 3x5^2 + 8x^3)dx.$$

Rješenje: Uvrstimo a, $\frac{a+b}{2}$ i b u funkciju $f(x) = 0.2 + 25x + 3x5^2 + 8x^3$, pa dobijemo $f(a) = f(0) = 0.2$, $f(\frac{a+b}{2}) = f(1) = 36.2$ i $f(b) = f(2) = 126.2$.

$$I = (b-a)\frac{f(0) + 4f(1) + f(2)}{6} = 2\frac{0.2 + 4 \cdot 36.2 + 126.2}{6} = 90.4.$$

Prava vrijednost integrala iznosi

$$\int_0^2 f(x)dx = (0.2x + 12.5x^2 + x^3 + 2x^4)|_0^2 = (0.2 \cdot 2 + 12.5 \cdot 2^2 + 2^3 + 2 \cdot 2^4) - 0 = 90.4$$

Dakle, simpsonova formula egzaktno integrira sve polinome stupnja 3. Dokažimo to općenito

Dokaz. Dovoljno je uzeti $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ i $f(x) = x^3$. Četvrte derivacije svih ovih funkcija iznose nula, pa je tako i greška $E(f) = 0$, pa je po definiciji Simpsonovo pravilo egzaktno za sve polinome trećeg stupnja.

□

Primjer 5 *Koristeći Simpsonovu formulu približno izračunajte vrijednost integrala*

$$\int_0^2 (0.2 + 25x + 3x^2 + 2x^4)dx.$$

Rješenje: Funkcija $f(x) = 0.2 + 25x + 3x^2 + 2x^4$ u točkama $a = 0$, $\frac{a+b}{2} = 1$ i $b = 2$ ima vrijednosti $f(0) = 0.2$, $f(1) = 30.2$ i $f(2) = 94.2$

$$I = (b-a)\frac{f(0) + 4f(1) + f(2)}{6} = 2 \cdot \frac{0.2 + 4 \cdot 30.2 + 94.2}{6} = 71.73.$$

Točna vrijednost integrala je

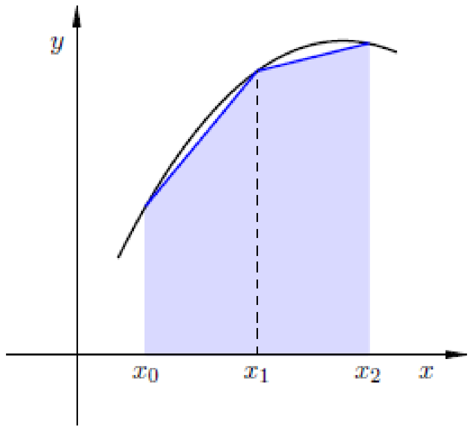
$$\int_0^2 f(x)dx = (0.2x + 12.5x^2 + x^3 + 0.4x^5)|_0^2 = (0.2 \cdot 2 + 12.5 \cdot 2^2 + 2^3 + 0.4 \cdot 2^5) - 0 = 71.2$$

Apsolutna greška je

$$\Delta = |71.2 - 71.73| = 0.53.$$

1.2.4 Produljene formule

Podijelimo interval $[a, b]$ na više podintervala i na svakom od njih primjenimo odgovarajuću integracijsku formulu niskog reda. Tako dobivene rezultate zbrojimo. Na primjer, za funkciju koju smo već razmatrali, geometrijski prikaz produljene trapezne formule s 2 podintervala izgledao bi ovako



Produljena trapezna formula

Općenito, produljenu trapeznu formulu dobivamo tako da cijeli interval $[a, b]$ podijelimo na n podintervala oblika $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$, s tim da je

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

i na svakom od njih upotrijebimo trapeznu formulu. Znamo da je tada

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx,$$

pa na isti način zbrojimo trapezne aproksimacije u produljenu trapeznu aproksimaciju.

Najjednostavniji je slučaj kad su točke x_k ekvidistantne, tj. kad je svaki podinterval $[x_{k-1}, x_k]$ iste duljine h. To znači da je

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Aproksimacija produljenom trapeznom formulom je

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right) + E_n^T(f),$$

pri čemu je $f_k = f(x_k), k = 0, \ldots, n$ i $E_n^T(f)$ greška produljene formule. Nju možemo zapisati kao zbroj grešaka osnovnih trapeznih formula na podintervalima

$$E_n^T(f) = -\sum_{k=1}^{n} f''(\zeta_k)\frac{h^3}{12} = -\frac{h^3 n}{12}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f''(\zeta_k)\right), \quad \zeta_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Teorem 6 (Teorem o međuvrijednostima) *Neka je funkcija f neprekidna na $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Neka su*

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad i \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Tada za svaki realni broj $d \in [m, M]$ postoji realan broj $c \in [a,b]$ tako da je

$$f(c) = d.$$

Izraz u zagradi je aritmetička sredina vrijednosti drugih derivacija u točkama $\zeta_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Taj se broj sigurno nalazi između najmanje i najveće vrijednosti druge derivacije funkcije f na intervalu $[a,b]$. Budući da je f'' neprekidna na $[a,b]$, onda je broj u zagradi vrijednost druge derivacije u nekoj točki $\xi \in [a,b]$, pa formulu za grešku možemo pisati kao

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3 n}{12} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi).$$

Iz ove formule izvodimo važnu ocjenu za broj podintervala potrebnih da se postigne zadana $\varepsilon-$točnost za produljenu trapeznu metodu

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2,$$

gdje je

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Želimo li da je $|E_n^T(f)| \leq \varepsilon$, onda je dovoljno tražiti da je

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq \varepsilon,$$

odnosno da je

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon} M_2}, \quad n \text{ cijeli broj.}$$

Primjer 6 *Koristeći produljenu trapeznu formulu sa 2 segmenta približno izračunajte integral*

$$\int_0^2 (0.2 + 25x + 3x5^2)dx.$$

Rješenje: Uzimamo $n = 2$ pa je $h = \frac{2-0}{2} = 1$. Funkcija $f(x) = 0.2 + 25x + 3x5^2$ u točkama $0, 1$ i 2 ima vrijednost $f(0) = 0.2, f(1) = 28.2$ i $f(2) = 62.2$. Približna vrijednost integrala I iznosi

$$I = (b-a)\frac{f(0) + 2f(1) + f(2)}{2n} = 2\frac{0.2 + 2 \cdot 28.2 + 62.2}{4} = 59.4$$

Pravo rješenje je

$$\int_0^2 f(x)dx = (0.2 + 12.5x^2 + x^3)|_0^2 = (0.2 \cdot 2 + 12.5 \cdot 2^2 + 2^3) - 0 = 58.4$$

Apsolutna greška je

$$\Delta = |58.4 - 59.4| = 1.$$

□

Primjer 7 *Koristeći produljenu trapeznu formulu približno izračunajte integral*

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

s 10 podintervala, te ocjenite grešku i nađite pravu grešku. Nađite broj podintervala potreban da se istom formulom postigne točnost 10^{-4}.

Rješenje: Ovdje je $f(x) = \frac{1}{1+x}, a = 0, b = 1, n = 10,$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1.$$

Čvorovi integracije x_k i funkcijske vrijednosti (napisane na 5 decimala) iznose

k	x_k	f_k
0	0.0	1.00000
1	0.1	0.90909
2	0.2	0.83333
3	0.3	0.76923
4	0.4	0.71429
5	0.5	0.66667
6	0.6	0.62500
7	0.7	0.58824
8	0.8	0.55556
9	0.9	0.52632
10	1.0	0.50000.

Uvrstimo te vrijednosti u produljenu trapeznu formulu

$$I_T = \int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right) = 0.1 \cdot 6.93771 = 0.693771.$$

Ocjenimo grešku, koristeći formulu

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)h^2}{12}M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2, \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|.$$

Prvo izračunamo M_2. Nađimo drugu derivaciju funkcije f :

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

pa je

$$M_2 = \max_{x\in[0,1]}|f''(x)| = \max_{x\in[0,1]}\left|\frac{2}{(1+x)^3}\right| = \max_{x\in[0,1]}\frac{2}{(1+x)^3}$$
$$= \{\text{razlomak je veći što mu je nazivnik manji}\} = 2.$$

Uvrštavanjem u ocjenu dobivamo

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{1\cdot 0.1^2}{12}2 = 0.00167$$

(zaokruženo na 5 znamenki). Prava vrijednost integrala je

$$I(f) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2 = 0.69315$$

(zaokruženo na 5 znamenki). Prava pogreška je

$$I(f) - I_T = 0.69315 - 0.69377 = -0.00062,$$

tj. prava je greška približno dva i pol puta bolja no što to kaže ocjena greške.

Na kraju, za $\varepsilon = 10^{-4}$ mora biti

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3M_2}{12\varepsilon}} = \sqrt{\frac{(1-0)^3\cdot 2}{12\cdot 10^{-4}}} = 40.82,$$

tj. $n \geq 41$.

$\square$

Produljena Simpsonova formula

Na sličan se način izvodi i produljena Simpsonova formula. Osnovna Simpsonova formula koristi 3 točke, tj. 2 podintervala, pa produljena formula mora imati paran broj podintervala. Pretpostavimo stoga da je n paran broj. Ograničimo se samo na ekvidistantni slučaj. Onda je ponovno

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Aproksimaciju integrala produljenom Simpsonovom formulom dobivamo iz

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx,$$

tako da na svakom podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, duljine $2h$, primijenimo običnu Simpsonovu formulu, za $k = 1, \ldots, \frac{n}{2}$. Zbrajanjem izlazi

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\Big(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n\Big) + E_n^S(f),$$

pri čemu je $E_n^S(f)$ greška produljene formule. Nju možemo zapisati kao zbroj grešaka osnovnih Simpsonovih formula na podintervalima

$$E_n^S(f) = -\sum_{k=1}^{n/2} f^{(4)}(\zeta_k)\frac{h^5}{90}, \quad \zeta_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}].$$

Opet je grešku korisno napisati malo drugačije

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5(n/2)}{90}\left(\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n/2} f^{(4)}(\zeta_k)\right).$$

Po teoremu o međuvrijdnostima, znamo da postoji $f^{(4)}(\xi), \xi \in [a,b]$, pa dobivamo

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5 n}{180} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$$

Ponovno, iz ove formule izvodimo ocjenu za broj podintervala potrebnih da se postigne zadana točnost za Simpsonovu metodu

$$|E_n^S(f)| \le \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 = \frac{(b-a)h^5}{180n^4} M_4,$$

gdje je

$$M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Želimo li da je $|E_n^S(f)| \leq \varepsilon$, onda je dovoljno tražiti da bude

$$\frac{(b-a)h^5}{180n^4} M_4 \leq \varepsilon,$$

odnosno da je

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}}, \quad n \text{ paran cijeli broj.}$$

Primjer 8 *Koristeći produljenu Simpsonovu formulu za $n = 4$ približno izračunajte vrijednost integrala*

$$\int_0^2 (0.2 + 25x + 3x^3 + 2x^4)dx.$$

Rješenje: $n = 4, h = \frac{b-a}{n} = 0.5$. Vrijednost fukncije $f(x) = 0.2 + 25x + 3x^3 + 2x^4$ u točkama je $f(x_0) = f(0) = 0.2, f(x_1) = f(0.5) = 13.575, f(x_2) = f(1) = 30.2, f(x_3) = f(1.5) = 54.575$ i $f(x_4) = f(2) = 94.2$.

$$\begin{aligned} I &= (b-a)\frac{f(0) + 4f(0.5) + 4f(1.5) + 2f(1) + f(2)}{3 \cdot 4} \\ &= 2 \cdot \frac{0.2 + 4 \cdot 13.575 + 4 \cdot 54.575 + 2 \cdot 30.2 + 94.2}{12} = 71.2333. \end{aligned}$$

Točna vrijednost integrala je

$$\int_0^2 f(x)dx = (0.2x + 12.5x^2 + x^3 + 0.4x^5)|_0^2 = (0.2\cdot 2 + 12.5\cdot 2^2 + 2^3 + 0.4\cdot 2^5) - 0 = 71.2$$

Apsolutna greška je

$$|\Delta| = |71.2 - 71.2333| * = |-0.0333| = 0.0333.$$

Primjer 9 *Koristeći produljenu Simpsonovu formulu približno izračunajte vrijednost integrala*

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

s 10 podintervala, te ocjenite grešku i nađite pravu grešku. Nađite broj podintervala potreban da se istom formulom postigne točnost 10^{-4}.

Rješenje: Imamo $f(x) = \frac{1}{1+x}, a = 0, b = 1$ i $n = 10$ je paran broj. Čvorovi integracije x_k i funkcijske vrijednosti (napisane na 5 decimala) iznose

k	x_k	f_k
0	0.0	1.00000
1	0.1	0.90909
2	0.2	0.83333
3	0.3	0.76923
4	0.4	0.71429
5	0.5	0.66667
6	0.6	0.62500
7	0.7	0.58824
8	0.8	0.55556
9	0.9	0.52632
10	1.0	0.50000.

Približna vrijednost iznosi

$$I_S = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + 2f_8 + 4f_9 + f_{10})$$

$$= \frac{0.1}{3} \cdot 20.79456 = 0.69315,$$

odnosno, da smo računali s više znamenki, bilo bi $I_S = 0.6931471805$. Prava greška je

$$I(f) - I_S = 0 \, \{\text{ako smo računali s 5 znamenki}\}$$
$$= -3.0505 \cdot 10^{-6} \, \{\text{ako smo računali s 10 znamenki}\}.$$

Za ocjenu greške potrebna nam je četvrta derivacija funkcije. Iskoristimo da smo drugu derivaciju već izračunali

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5},$$

pa imamo

$$M_4 = \max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| = \max_{x\in[0,1]} \left|\frac{24}{(1+x)^5}\right| = \max_{x\in[0,1]} \frac{24}{(1+x)^5} = 24.$$

Uvrštavanjem u ocjenu dobivamo

$$|E_n^S(f)| \leq \frac{1 \cdot 0.1^4}{180} 24 = 1.33333 \cdot 10^{-5}.$$

Da bismo postigli točnost $\varepsilon = 10^{-8}$ potrebno je

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}} = \sqrt[4]{\frac{(1-0)^5 \cdot 24}{180 \cdot 10^{-8}}} = 60.4275,$$

tj. $n \geq 62$ (mora biti paran!).

□

1.2.5 Formula srednje točke (midpoint formula)

Ako je f pozitivna i neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$ tada nam $\int_a^b f(x)dx$ daje površinu P krivolinijskog trapeza koje je omeđen sa $[a,b]$ odozdo, sa grafom funkcije $f(x)$ odozgo i sa pravcima $x = a, x = b$ sa strane. Uočimo sada središnju točku segmenta $[a,b]$, tj točku $c = \frac{a+b}{2}$ i pravokutnik kojem je donja baza segment $[a,c]$, gornja baza se nalazi na pravcu $y = f(c)$, a sa strane je ograničen pravcima $x = a$ i $x = c$. Površina tog pravokutnika je $Q = (c-a)f(c)$. Ako je $h = b-a$ dovoljno malo tada možemo očekivati da je $P \approx Q$, tj. da krivolinijski trapez i taj pravokutnik imaju približno jednake površine. Kako je $P = \int_a^b f(x)dx$ to možemo staviti

$$\int_a^b f(x)dx \approx hf(c) + E^M(f),$$

tj

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + E^M(f),$$

gdje je $E^M(f)$ greška formule srednje točke. Ovo pravilo egzaktno je za polinome stupnja ≤ 1, kad uvrstimo $f(x) = 1$, u formulu

$$\int_a^b f(x)dx = w_0 f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

dobivamo

$$b - a = \int_a^b 1dx = w_0,$$

odakle odmah slijedi da je

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Slično za $f(x) = x$ dobivamo

$$(b-a)f(\frac{a+b}{2}) = \int_a^b xdx = \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{(b-a)(b+a)}{2} = hf\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Za polinome višeg stupnja, npr $f(x) = x^2$ dobivamo:

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{(b-a)^3}{3} = \frac{(b-a)^3}{8} \cdot \frac{8}{3} = h^3 \cdot \frac{8}{3} \neq h^3.$$

Greška formule srednje točke

Za formulu srednje točke imamo aproksimaciju

$$I(f) = (b-a)f(\frac{a+b}{2}).$$

Formula je egzaktna za polinome stupnja 1, pa po Peanovom teoremu imamo

$$E(f) = \frac{1}{1!}\int_a^b K(t)f''(t)dt,$$

gdje je $K(t) = E[(x-t)_+]$.

$$\begin{aligned} K(t) = E[(x-t)_+] &= \int_a^b (x-t)_+ 3 - I((x-t)_+) \\ &= \frac{(x-t)^2}{2}\Big|_t^b - (b-a)\left(\frac{a+b}{2} - t\right)_+ \\ &= \frac{(b-t)^2}{2} - (b-a)\left(\frac{a+b}{2} - t\right)_+ . \end{aligned}$$

Kada integriramo $K(f)$ dobijamo

$$\begin{aligned} \int_a^b K(t)dt &= \int_a^b \frac{(b-t)^2}{2}dt - (b-a)\int_a^b \left(\frac{a+b}{2} - t\right)_+ dt \\ &= \frac{(b-t)^3}{6}\Bigg|_a^b - (b-a)\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - t\right) dt \\ &= \frac{(b-a)^3}{6} - \frac{(b-a)^3}{8} = -\frac{(b-a)^3}{24} \end{aligned}$$

Kada ovo uvrstimo u izraz za E, i po teoremu o integralnoj srednjoj vrijednosti, slijedi

$$E(f) = -\frac{(b-a)^3}{24}f''(\zeta),$$

za $\zeta \in [a,b]$.

Koristimo li produljenu midpoint formulu na n podintervala jednake duljine h, dobijemo

$$I_n(f) = h(f_1 + \cdots + f_n) + E_n^M(f), \quad h = \frac{b-a}{n},$$

$$x_k = a + \left(k - \frac{1}{2}\right) h,$$

pri čemu je $E_n^M(f)$ ukupna greška koje je jednaka

$$E_n^M(f) = \sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k)\frac{h^3}{24} = \frac{h^3 n}{24}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k)\right) = \frac{h^3 n}{24} f''(\xi) = \frac{h^2(b-a)}{24} f''(\xi),$$

gdje je $\xi \in [a,b]$.

1.3 Rombergov algoritam

Rombergov algoritam je postupak koji popravlja rezultat numeričke integracije koristeći tehniku popravljanja greške. Pri izvodu **Rombergovog algoritma** koristimo se sljedećim principima:

1. udvostručavanjem broja podintervala u produljenoj trapeznoj formuli,
2. eliminacijom člana greške iz dviju susjednih produljenih formula (ponovljena primjena ovog principa zove se **Richardsonova ekstrapolacija**).

Da bismo nastavili moramo se najprije podsjetiti što su Bernoullijevi polinomi i iz njih definirani Bernoullijeve brojevi.
Bernoullijevi polinomi zadani su implicitno funkcijom izvodnicom

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\frac{x^2}{2!} - \frac{1}{30}\frac{x^4}{4!} + \frac{1}{42}\frac{x^6}{6!} - \ldots,$$

dok se **Bernoullijevi brojevi** rekurzivno definiraju s

$$B_0 = 1,$$

$$B_n = \frac{-1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k+1} B_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prvih nekoliko Bernoullijevih polinoma su:

- $B_0(x) = 1$
- $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$
- $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$
- $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
- $B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$.

Općenito vrijedi

$$B_{2n+1}(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Evo prvih nekoliko Bernoullijevih brojeva:

- $B_0 = 1$
- $B_1 = -\frac{1}{2}$
- $B_2 = \frac{1}{6}$
- $B_3 = 0$
- $B_4 = -\frac{1}{30}$
- $B_5 = 0$
- $B_6 = \frac{1}{42}$
- $B_{60} \approx -2.139994926 \cdot 10^{34}$.

Općenito vrijedi

$$B_n = B_n(0), \quad n \in \mathbb{N},$$

pa je

$$B_{2n+1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Za Bernoullijeve polinome vrijedi i

$$\int_0^1 B_n(x)dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ponekad su nam potrebna i **periodička proširenja Bernoullijevih polinoma.** Ona se definiraju kao

$$B_n^*(x) = \begin{cases} B_n(x), & x \in [0,1], \\ B_n^*(x-1), & x > 1 \end{cases}.$$

Sada ćemo se upoznati s jednim od klasičnih teorema numeričke analize koji nam daje **asimptotski razvoj ocjene greške** za trapeznu formulu.

Teorem 7 (Euler-Maclaurinova formula) *Neka je $m \geq 0, n \geq 1, m, n$ cijeli brojevi. Definiramo ekvidistantnu mrežu s n podintervala na $[a, b]$, tj.*

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Pretpostavio da je $f \in C^{2m+2}([a, b])$. Za pogrešku produljene trapezne metode vrijedi

$$E_n(f) = \int_a^b f(x)dx - I_n^T(f) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d_{2i}}{n^{2i}} + F_{n,m},$$

gdje su koeficijenti

$$d_{2i} = -\frac{B_{2i}}{(2i)!}(b-a)^{2i}(f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)),$$

a ostatak je

$$F_{n,m} = \frac{(b-a)^{2m+2}}{(2m+2)!n^{2m+2}} \cdot \int_a^b B^*_{2m+2}\left(\frac{b-a}{h}\right) f^{(2m+2)}(x)dx.$$

$\square$

Sada možemo izvesti Rombergov algoritam.
Označimo s $I_n^{(0)}$ trapeznu formulu s duljinom intervala $h = \frac{b-a}{n}$. Iz Euler-MacLaurinove formule, ako je n paran, za asimptotski razvoj greške imamo

$$\int_a^b f(x)dx - I_n^{(0)} = \frac{d_2^{(0)}}{n^2} + \frac{d_4^{(0)}}{n^4} + \cdots + \frac{d_{2m}^{(0)}}{n^{2m}} + F_{n,m}$$

$$\int_a^b f(x)dx - I_{n/2}^{(0)} = \frac{4d_2^{(0)}}{n^2} + \frac{16d_4^{(0)}}{n^4} + \cdots + \frac{2^{2m}d_{2m}^{(0)}}{n^{2m}} + F_{n/2,m}.$$

Ako prvi razvoj pomnožimo s 4 i oduzmemo mu drugi razvoj, skratit će se prva greška s desne strane $d_2^{(0)}$, tj. dobit ćemo

$$4\left(\int_a^b f(x)dx - I_n^{(0)}\right) - \left(\int_a^b f(x)dx - I_{n/2}^{(0)}\right) = \frac{-12d_4^{(0)}}{n^4} - \frac{60d_6^{(0)}}{n^6} + \ldots$$

Izlučivanjem članova koji imaju $\int_a^b f(x)dx$ na lijevu stranu, a zatim dijeljenjem, dobivamo

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{4I_n^{(0)} - I_{n/2}^{(0)}}{3} - \frac{4d_4^{(0)}}{n^4} - \frac{20d_6^{(0)}}{n^6} + \ldots.$$

Prvi član zdesna možemo uzeti kao bolju, popravljenu aproksimaciju integrala, u oznaci

$$I_n^{(1)} = \frac{4I_n^{(0)} - I_{n/2}^{(0)}}{3}, \quad n \text{ paran}, \ n \geq 2.$$

Greška aproksimacijskog niza $I_n^{(1)}$ je

$$\int_a^b f(x)dx - I_n^{(1)} = \frac{d_4^{(1)}}{n^4} + \frac{d_6^{(1)}}{n^6} + \dots,$$

gdje je

$$d_4^{(1)} = -4d_4^{(0)}, \quad d_6^{(1)} = -20d_6^{(0)}.$$

Cilj nam je naći eksplicitnu formulu za $I_n^{(1)}$.
Vrijedi (produljena trapezna formula)

$$I_n^{(0)} = h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right),$$

$$I_{n/2}^{(0)} = h_1\left(\frac{1}{2}f_0 + f_2 + \dots + f_{n-2} + \frac{1}{2}f_n\right), \quad h_1 = 2h.$$

Uvrštavanjem u $I_n^{(1)}$ dobijamo

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &= \frac{4h}{3}\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right) - \frac{2h}{3}\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \dots + f_{n-2} + \frac{1}{2}f_n\right) \\ &= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \end{aligned}$$

što je Simpsonova formula s n podintervala. Postupak možemo nastaviti na analogan način:

$$\int_a^b f(x)dx - I_{n/2}^{(1)} = \frac{16d_4^{(1)}}{n^4} + \frac{64d_6^{(1)}}{n^6} + \dots,$$

pa je

$$16\left(\int_a^b f(x)dx - I_n^{(1)}\right) - \left(\int_a^b f(x)dx - I_{n/2}^{(1)}\right) = \frac{-48d_6^{(1)}}{n^6} + \dots$$

odnosno

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{16I_n^{(0)} - I_{n/2}^{(1)}}{15} - \frac{48d_6^{(1)}}{n^6} + \dots.$$

Ponovno prvi član s desne strane jednakosti proglasimo novom aproksimacijom integrala

$$I_n^{(2)} = \frac{16 I_n^{(0)} - I_{n/2}^{(1)}}{15}, \quad n \text{ paran}, \, n \geq 2.$$

Ako ovaj postupak nastavimo induktivno, dobijemo Richardsonovu ekstrapolaciju

$$I_n^{(k)} = \frac{4^k I_n^{(k-1)} - I_{n/2}^{(k-1)}}{4^k - 1}, \quad n \geq 2^k \text{ djeljiv } 2^k$$

pri čemu je greška za $f \in C^{(2k+2)}([a, b])$ jednaka

$$E_n^{(k)}(f) = \int_a^b f(x)dx - I_n^{(k)}(f) = \frac{d_{2k+2}^{(k)}}{n^{2k+2}} + \dots$$

Sada možemo definirati **Rombergovu tablicu**

$$\begin{array}{llll} I_1^{(0)} & & & \\ I_2^{(0)} & I_2^{(1)} & & \\ I_4^{(0)} & I_4^{(1)} & I_4^{(2)} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

gdje se u prvom stupcu nalaze približne vrijednosti integrala dobivene iz produljenje trapezne formule sa 1, 2, 4, ... podintervala. U drugom i trećem stupcu se nalaze približne vrijednosti integrala dobivene iz Rombergovog algoritma.

Primjer 10 *Koristeći Rombergov algoritam približno izračunajte vrijednost integrala*

$$\int_0^{0.8} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5)dx.$$

Rješenje: Prava vrijednost integrala I iznosi

$$I = \int_0^{0.8} f(x)dx = \int_0^{0.8} (0.2+25x-2000x^2+675x^3-900x^4+400x^5)dx = 1.640533.$$

Primjenimo Rombergov algoritam. Za
$n = 1, h_1 = 0.8$
$f(0) = 0.2, f(0.8) = 0.232$
$I_{1,1} = \int_0^{0.8} f_1(x)dx = 0.8 \cdot \frac{f(0) + f(0.8)}{2} = 0.1728$, a apsolutna greška je

$\Delta = 1.46773.$

$n = 2, h_2 = \frac{b-a}{2} = 0.4, (h_2 = h1/2)$
$f(0) = 0.2, f(0.8) = 0.232, f(0.4) = 2.456$
$I_{2,1} = \int_0^{0.4} f_1(x)dx + \int_{0.4}^{0.8} f_1(x)dx = 0.4 \cdot \frac{f(0)+f(0.4)}{2} + 0.4 \cdot \frac{f(0.4)+f(0.8)}{2} =$ $1.0688,$
$\Delta = 0.57173.$

$n = 4, h_3 = \frac{b-a}{4} = 0.2, (h_3 = h_2/2)$
$I_{3,1} = \frac{0.2}{2}[f(0) + 2f(0.2) + 2f(0.4) + 2f(0.6) + f(0.8)] = 1.4848,$
$\Delta = 0.15573$

$I_{1,2} = \frac{4I_{2,1} - I_{1,1}}{4-1} = \frac{4}{3}I_{2,1} - \frac{1}{3}I_{1,1} = \frac{4}{3} \cdot 1.0688 - \frac{1}{3} \cdot 0.1728 = 1.36746,$
$\Delta = 0.27307.$

$I_{2,2} = \frac{4I_{3,1} - I_{2,1}}{4-1} = \frac{4}{3}I_{3,1} - \frac{1}{3}I_{2,1} = \frac{4}{3} \cdot 1.4848 - \frac{1}{3} \cdot 1.0688 = 1.62346,$
$\Delta = 0.01707.$

$I_{1,4} = \frac{4^2 I_{2,2} - I_{1,2}}{4^2-1} = \frac{16}{15}I_{2,2} - \frac{1}{15}I_{1,2} = \frac{16}{15} \cdot 1.623467 - \frac{1}{15} \cdot 1.367467 = 1.64053,$
$\Delta = 0.0.$

Primjer 11 *Koristeći Rombergov algoritam približno izračunajte vrijednost integrala*

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

Rješenje: U prethodnim primjerima već smo izračunali pravu vrijednost integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = 0.69315.$$

Pogledajmo sad algoritam za $n = 1, h_1 = \frac{1-0}{1} = 1.$
$f(0) = 1, f(1) = \frac{1}{2}$
$I_1^{(0)} = \int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \{\text{po trapeznoj formuli}\} = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) =$ 0.75. Prava greška iznosi $E_1^{(0)} = 0.05685.$

Nadalje za $n = 2, h_2 = \frac{1}{2}$

$f(0)=1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}, \quad f(1)=\frac{1}{2}$

$I_2^{(0)}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{1-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\frac{2}{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{2}=0.70833$. Prava greška iznosi $E_2^{(0)}=0.01518$.

Za $n=4, h_3=\frac{1}{4}=0.25$

k	x	f_k
0	0.00	1.00000
1	0.25	0.80000
2	0.50	0.66666
3	0.75	0.57143
4	1.00	0.50000

,

pa je $I_4^{(0)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}f_0+f_1+f_2+f_3+\frac{1}{2}f_4\right)=0.69702$ i $E_4^{(0)}=0.00387$.

Iz rekurzivne formule imamo:

$I_2^{(1)}=\frac{4^1\cdot I_2^{(0)}(f)-I_1^{(0)}(f)}{4^1-1}=\frac{4\cdot 0.70833-0.75}{4^1-1}=0.69444, \quad E_2^{(1)}=0.00129$

$I_4^{(1)}=\frac{4^1\cdot I_4^{(0)}(f)-I_2^{(0)}(f)}{4^1-1}=\frac{4\cdot 0.69702-0.70833}{4^1-1}=0.69444, \quad E_4^{(1)}=0.00010$

$I_4^{(2)}=\frac{4^2\cdot I_4^{(1)}(f)-I_2^{(1)}(f)}{4^2-1}=\frac{4\cdot 0.69325-0.06944}{4^2-1}=0.69317, \quad E_4^{(2)}=0.0000023$

Vidimo da za razliku od produljenje trapezne formule, gdje je greška za isti zadatak jednaka $E_n^T(f)=0.00167$, Romberovom integracijom dobivamo puno bolju točnost.

1.4 Težinske integracijske formule

Želimo (približno) izračunati vrijednost integrala

$$I_w(f)=\int_a^b f(x)w(x)dx, \tag{1.9}$$

gdje je w pozitivna (ili barem nenegativna) težinska funkcija za koju pretpostavljamo da je integrabilna na (a,b), s tim da dozvoljavamo da w nije definirana u rubovima a i b. Interval integracije može biti konačan, ali i beskonačan. Katkad koristimo i skraćenu oznaku $I(f)$, umjesto $I_w(f)$, za integral u (1.9), ako je $w(x) = 1$ na cijelom $[a, b]$, ili kad je težinska funkcija jasna iz konteksta, da skratimo pisanje.

Za razliku od ranijih oznaka, ovdje je zgodnije točke numerirati od 1, a ne od 0. Opća težinska integracijska ili kvadraturna formula za aproksimaciju integrala $I_w(f)$ ima oblik

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} w_k^{(n)} f(x_k^{(n)}), \tag{1.10}$$

gdje je n prirodni broj. Kao i prije, gornje indekse (n) za čvorove i težine često ne pišemo, ako su očiti iz konteksta.

Dakle, sasvim općenito možemo pisati

$$I_w(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx = I_n(f) + E_n(f), \tag{1.11}$$

gdje je $E_n(f)$ greška aproksimacije.

Podsjetimo se da je

$$\begin{aligned} ||a||_1 &= |a_1| + \cdots + |a_n|, \\ ||a||_\infty &= max\{|a_1| + \cdots + |a_n|\}, \end{aligned}$$

pri čemu je $a = (a_1, \ldots, a_n)$, no sada će nam trebati norme funkcija. Za funkciju $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiramo

$$\begin{aligned} ||g||_1 &= \int_a^b |g(x)|dx, \\ ||g||_\infty &= \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|. \end{aligned}$$

Osnovnu podlogu za konstrukciju integracijskih formula i ocjenu greške $E_n(f)$ daje sljedeći rezultat.

Teorem 8 *Ako je*

$$I_w(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx$$

Riemannov integral na konačnoj domeni $[a, b]$ *i ako je* $\hat{f}$ *bilo koja druga funkcija za koju postoji* $I_w(\hat{f})$, *onda vrijedi ocjena*

$$|I_w(f) - I_w(\hat{f})| \le ||w||_1 ||f - \hat{f}||_\infty, \tag{1.12}$$

i postoji funkcija $\hat{f}$ *za koju se ova ocjena dostiže.*

Dokaz. Prvo uočimo da w ne mora biti nenegativna, jer je riječ o Riemannovom integralu, ali zato treba pretpostaviti da je $|w|$ integrabilna.

Ocjena izlazi direktno iz osnovnih svojstava Riemannovog integrala jer podintegralne funkcije moraju biti ograničene. Dobivamo

$$\begin{aligned} |I_w(f) - I_w(\hat{f})| &= \left| \int_a^b f(x)w(x)dx - \int_a^b \hat{f}(x)w(x)dx \right| \\ &\leq \int_a^b |w(x)| \cdot |f(x) - \hat{f}(x)| dx. \end{aligned}$$

Iskoristimo ocjenu

$$|f(x) - \hat{f}(x)| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \hat{f}(x)| = ||f - \hat{f}||_\infty, \quad \forall x \in [a,b],$$

pa dobijemo

$$|I_w(f) - I_w(\hat{f})| \leq ||f - \hat{f}||_\infty \int_a^b |w(x)| dx = ||w||_1 ||f - \hat{f}||_\infty$$

■

Zamislimo da je $\hat{f}$ neka aproksimacija (a ne perturbacija) funkcije f, koju želimo iskoristiti za približno računanje integrala.
Napomena:

- **Aproksimacija** je postupak pronalaženja funkcije koja približno opisuje (aproksimira) zadani konačni skup točaka ili neku drugu funkciju.
- **Teorija perturbacije** se bavi time kako se rješenje (ili rješenja) ponašaju kad se polazni podaci malo promijene.

Onda (1.12) daje ocjenu apsolutne greške u integralu, preko greške aproksimacije funkcije u uniformnoj (L_∞) normi na $[a, b]$.

Definicija 8 *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Prostor V je* ***normiran*** *ako je na njemu zadana funkcija $|| \cdot || : V \to \mathbb{F}$ koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

- $||x|| \geq 0, \forall x \in V$, *a jednakost vrijedi ako i samo ako je* $x = 0$,
- $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in V$,
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in V$, *nejednakost trokuta.*

Neka je $V_n(\mathbb{C}_n)$ skup uređenih n-torki relnih (kompleksnih) brojeva. Operaciju zbrajanja i množenja n-torki definiramo: neka su

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \quad i \quad y = (y_1, \ldots, y_n)$$

dvije n-torke iz V_n (ili C_n) i $\alpha \in \mathbb{R}$ (ili $\alpha \in \mathbb{C}$), tada su operacije zbrajanja i množenja skalarom definirane s

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad i \quad \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

$(V_n, +, \cdot)$ je realni vektorski prostor, a $(C_n, +, \cdot)$ kompleksni vektorski prostor. U tim vektorskim prostorima možemo definirati sljedeće norme

- $||x||_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$, apsolutna ili L_1 norma
- $||x||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$, euklidska ili L_2 norma,
- $||x||_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$, uniformna ili L_∞ norma.

Ono što stvarno želimo dobiti je niz aproksimacija integrala koji konvergira prema $I_w(f)$. Jedan od načina da to postignemo je izbor odgovarajućeg niza aproksimacija $\hat{f}_n, n \in \mathbb{N}$, za funkciju f. Prethodna ocjena upućuje na to da, u ovisnosti o n, za aproksimacijske funkcije $\hat{f}_n$ treba uzimati takve funkcije za koje znamo da možemo postići **uniformnu** aproksimaciju funkcije f, jer tada vrijedi

$$||f - \hat{f}||_\infty \to 0, \quad n \to \infty$$

pa dobijemo

$$|I_w(f) - I_w(\hat{f}_n)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Definicija 9 *Kažemo da niz relanih brojeva $\{a_n\}$ ima limes $L \in \mathbb{R}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da*

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon.$$

Tada pišemo

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L,$$

*i kažemo da niz **konvergira**, u protivnom kažemo da **divergira**.*

Definicija 10 *Kažemo da niz funkcija $\{f_n(x)\}$ konvergira po točkama prema funkciji f na intervalu I ako za svaki $x_0 \in I$ niz realnih brojeva $\{f_n(x_0)\}$ konvergira prema realnom broju $f(x_0)$.*

Definicija 11 *Kažemo da niz funkcija $\{f_n(x)\}$ konvergira **uniformno** prema funkciji f na intervalu I ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je*

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

tj. kad vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Za praktičnu primjenu ovog pristupa moramo efektivno izračunati integral $I_w(\hat{f})$ aproksimacijske funkcije, i to za bilo koju funkciju f za koju postoji $I_w(f)$. To se najlakše postiže tako da konstruiramo pripadnu integracijsku formulu I_n koja je egzaktna na cijelom prostoru polinoma $\mathcal{P}_d$. Dakle, uvjet egzaktnosti za I_n je

$$I_w(f) = I_n(f) \text{ ili } E_n(f) = 0, \quad \text{za sve } f \in V_n.$$

Pri tom imamo iz (1.11) i (1.12) **ocjenu greške** pripadne integracijske formule $I_n(f)$ za bilo koju f

$$|E_n(f)| = |I_w(f) - I_n(f)| = |I_w(f) - I_w(\hat{f}_n)| \leq ||w||_1 ||f - \hat{f}_n||_\infty.$$

1.5 Gaussove integracijske formule

U dosadašnjim metodama smo pomoću zadanih n čvorova točno računali vrijednosti integrala polinoma najviše $n-$tog stupnja. Tako npr. trapezno pravilo računa točno površinu ispod pravca, a Simpsonova formula točno računa površinu ispod grafa polinoma 2. stupnja. Zanima nas možemo li konstruirati formule pomoću kojih točno računamo integrale polinoma stupnja višeg od interpolacijskog polinoma. Upravo to svojstvo će imati Gaussove integracijske formule.

Kao što smo već rekli, Gaussove formule imaju dvostruko više slobodnih parametara nego Newton-Cotesove, pa bi zbog toga trebale egzaktno integrirati polinome približno dvostruko većeg stupnja od Newton-Cotesovih.

1.5.1 Opći oblik Gaussove integracijske formule

Gaussove integracijske formule su oblika

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$

u kojima točke integracije x_i nisu unaprijed poznate, nego se izračunaju tako da greška takve formule bude najmanja.

w je **težinska funkcija**, pozitivna na otvorenom intervalu (a, b). Koeficijente w_i zovemo **težinski koeficijenti** ili, skraćeno **težine** integracijske formule. Gornji specijalni slučaj u kojem je $w \equiv 1$ čine formule koje se zovu **Gauss-Legendreove**.

Ovisno o izboru težinske funkcije, Gaussova formula poprima drugačiji oblik i naziv.

težinska funkcija w	interval	formula Gauss
1	$[-1, 1]$	Legendere
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1, 1]$	Čebišev
$\sqrt{1-x^2}$	$[-1, 1]$	Čebišev 2. vrste
e^{-x}	$[0, \infty)$	Laguerre
e^{-x^2}	$(-\infty, \infty)$	Hermite

Definicija: *Stupanj preciznosti kvadraturne formule je najveći broj* $m \in \mathbb{N}$ *takav da je* $E(x^k) = 0$*, za svaki* $k = 0, 1, \ldots, m$*, ali je* $E(x^k + 1) \neq 0$.

Želimo da je ta formula stupnja preciznosti m, dakle da vrijedi

$$\int_a^b x^k dx - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m.$$

Zahtijevamo da formula integrira egzaktno polinome što je moguće većeg stupnja, onda su točke integracije x_i nultočke polinoma koji su ortogonalni na intervalu (a, b) obzirom na težinsku funkciju w, a težine w_i mogu se eksplicitno izračunati po formuli

$$w_i = \int_a^b w(x)\ell_i(x)dx, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Pritom je ℓ_i poseban polinom Lagrangeove baze definiran uvjetom

$$\ell_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Kao što se Newton-Cotesove formule mogu dobiti integracijom Lagrangeovog interpolacijskog polinoma, tako se i Gaussove formule mogu dobiti integracijom Hermiteovog interpolacijskog polinoma.

Hermiteov interpolacijski polinom h_{2n-1}, stupnja $2n-1$, koji u čvorovima integracije x_i interpolira vrijednosti $f_i = f(x_i)$ i $f'(x_i)$, za $i = 1, \ldots, n$ je

$$h_{2n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left([1 - 2(x - x_i)\ell_i'(x_i)]\ell_i^2(x) f_i + (x - x_i)\ell_i^2(x) f_i' \right) . \tag{1.13}$$

Integracijom dobijemo

$$\int_a^b w(x) h_{2n-1}(x) dx = \sum_{i=1}^{n} (A_i f_i + B_i f_i').$$

gdje su

$$\begin{aligned} A_i &= \int_a^b w(x)[1 - 2(x - x_i)\ell_i'(x_i)]\ell_i^2(x) dx, \\ B_i &= \int_a^b w(x)(x - x_i)\ell_i^2(x) dx, \end{aligned} \tag{1.14}$$

za $i = 1, \ldots, n$.

Ideja je pokušati izbjeći korištenje derivacija, a to ćemo postići tako da odgovarajućim izborom čvorova x_i poništimo koeficijente B_i uz derivacije f_i'. Pri tom egzaktnost integracijske formule mora ostati ista (ostao je isti i broj nepoznatih parametara).

Odgovarajućim izborom (različitih) čvorova x_i možemo poništiti koeficijente B_i, no za to nam je potrebno uvesti "polinom čvorova" ω_n koji ima nultočke u svim čvorovima integracije. On je zadan s

$$\omega_n(x) := (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Očito je da ovaj polinom ima točno n jednostrukih nultočaka i da su to upravo čvorovi x_i. Sljedeća lema nam govori kako izabrati čvorove integracije.

Lema 1 *Ako je $\omega_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ **ortogonalna s težinom** w na sve polinome nižeg stupnja, tj. ako vrijedi*

$$\int_a^b w(x)\omega_n(x) x^k dx = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1.15}$$

onda su koeficijenti B_i u (1.14) jednaki nula.

Dokaz. Direktno provjerimo identitet

$$(x - x_i)\ell_i(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_i)}. \tag{1.16}$$

Supstitucijom ovog identiteta u izraz za B_i slijedi

$$B_i = \frac{1}{\omega_n'(x_i)} \int_a^b w(x)\omega_n(x)\ell_i(x)dx.$$

Kako je ℓ_i polinom stupnja $n - 1$, i po pretpostavci je ω_n ortogonalna s težinom w na sve polinome, nižeg stupnja, a stupanj polinoma ℓ_i je najviše $n - 1$, to tvdnja odmah slijedi.

■

Pokazali smo da Gaussovu integracijsku formulu možemo dobiti kao integral Hermiteovog interpolacijskog polinoma, uz odgovarajući izbor čvorova, a za težinske koeficijente vrijedi

$$w_i = \int_a^b w(x)\ell_i(x)dx \tag{1.17}$$

Primjer 12 *Neka je $n = 2$, na segmentu $[-1, 1]$ izračunajmo kvadraturnu formulu. Sustav je zadan sa*

$$\int_{-1}^{1} x^k dx - w_1 x_1^k - w_2 x_2^k = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Za $k = 0$ imamo $w_1 + w_2 = 2$,
$k = 1$, $w_1x_1 + w_2x_2 = 0$,
$k = 2$, $w_1x_1^2 + w_2x_2^2 = \frac{2}{3}$,
$k = 3$, $w_1x_1^3 + w_2x_2^3 = 0$

Rješavanjem gornjeg sustava dobijemo $w_1 = w_2 = 1, x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

1.5.2 Gauss-Legendereove integracijske formule

Pretpostavimo u daljnjem da je $w \equiv 1$ na intervalu $(-1, 1)$ i izvedimo specijalnu Gaussovu formulu, tj. Gauss-Legendreovu formulu

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i).$$

Legendreov polinom stupnja n definiran je **Rodriguesovom formulom**

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Tako definirani polinomi čine **ortogonalnu bazu** u prostoru polinoma stupnja n, tj. oni su linearno nezavisni i ortogonalni obzirom na skalarni produkt

$$\langle P, Q\rangle := \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx. \tag{1.18}$$

Lema 2 *Legendreov polinom stupnja n ortogonalan je na sve potencije x^k nižeg stupnja, tj. vrijedi*

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n(x)dx = 0, \quad za \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

i vrijedi

$$\int_{-1}^{1} x^n P_n(x)dx = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

□

Lema 3 *Legendreovi polinomi su ortogonalni na intervalu $(-1,1)$ obzirom na skalarni produkt (1.18)*

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0, \quad za \quad m \neq n.$$

Norma Legendreovog polinoma je

$$||P_n||^2 := \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Lema 4 *Legendreovi polinomi P_n imaju n nultočaka, koje su sve realne i različite, i nalaze se na otvorenom intervalu $(-1,1)$.*

Dokaz. Dokaz ide iz definicije Legendreovih polinoma

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,$$

induktivnom primjenom Rolleoveg teorema.

Teorem 9 ***(Rolleov teorem)*** *Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b), i ako je $f(a) = f(b)$, tada postoji $x_0 \in (a, b)$ takav da je $f'(x_0) = 0$.*

Polinom $(x^2 - 1)^n$ je stupnja $2n$ i ima višestruke nultočke u rubovima intervala ± 1. Prema Rolleovom teoremu, prva derivacija ima jednu nultočku u intervalu $(-1, 1)$. Međutim, prva derivacija je, također, nula u ± 1, pa ukupno mora imati tri nultočke u zatvorenom intervalu $[-1, 1]$. Druga derivacija stoga ima dvije unutarnje nule po Rolleovom teoremu, i dvije u ± 1, pa ima ukupno četiri nule u $[-1, 1]$. I tako redom, vidimo da $n-1$ derivacija ima $n - 1$ unutarnju nultočku i još dvije u ± 1. Na kraju zaključimo da n-ta derivacija, koja je do multiplikativni faktor jednaka P_n, ima n unutarnjih nultočaka.

■

Na taj način smo zapravo našli točke integracije u Gauss-Legendreovoj formuli i bez eksplicitnog rješavanja nelinearnog sistema jednadžbi za w_i i x_i, iz uvjeta egzaktne integracije potencija najvećeg mogućeg stupnja. Taj rezultat rezimiran je u sljedećem teoremu.

Teorem 10 *Čvorovi integracije u Gauss-Legendreovoj formuli reda n su nultočke Legendreovog polinoma P_n, za svaki n.*

Dokaz. Znamo da su točke integracije x_i nultočke polinoma ω_n po konstrukciji. Zbog uvjeta ortogonalnosti (1.15) polinom ω_n, s vodećim koeficijentom 1, proporcionalan je Legendreovom polinomu P_n. Vodeći koeficijent u P_n lako izračunamo iz Rodriguesove formule, odakle je

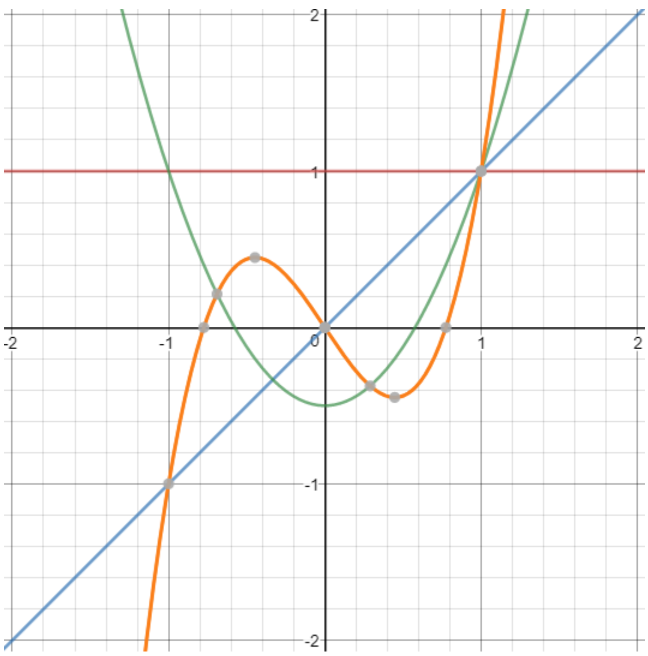
$$\omega_n(x) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} P_n(x),$$

pa vidimo sa su sve nultočke polinoma ω_n zapravo nultočke od P_n (lema 4).

Primjer 13 *Iz Rodrigueseove formule možemo izračunati nekoliko prvih Le-*

gendreovih polinoma.

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1,\\
P_1(x) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2-1) = x,\\
P_2(x) &= \frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \frac{1}{2}(3x^2-1),\\
P_3(x) &= \frac{1}{48}\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3 = \frac{1}{2}(5x^3-3x),\\
P_4(x) &= \frac{1}{16\cdot 24}\frac{d^4}{dx^4}(x^2-1)^4 = \frac{1}{8}(35x^24-30x^2+3),\\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x),\\
P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5),\\
P_7(x) &= \frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x),\\
P_8(x) &= \frac{1}{128}(6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35).
\end{aligned}$$



Grafički prikaz prva četiri Legendreova polinoma

Primjer 14 *Izračunajmo čvorove integracije za* $n = 3$. *Tražimo nultočke Ledendreovog polinoma* P_3.

$$P_3 = 0$$

$$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = 0$$

$$\frac{1}{2}x(5x^2 - 3) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0$$

$$5x^2 - 3 = 0$$

$$5x^2 = 3 \Longrightarrow x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}, x_3 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Računanje nultočaka Legendreovih polinoma nije jednostavan problem, budući da egzaktne formule postoje samo za male stupnjeve. Postoji lakši način za računanje $P_n(x)$, zasnovan na činjenici da Legendreovi polinomi zadovoljavaju tročlanu rekurziju, čiji se koeficijenti mogu eksplicitno izračunati. Ova rekurzivna formula ima važnu ulogu i u kontrukciji spomenutog specijalnog algoritna za traženje nutločaka.

Lema 5 *Legendreovi polinomi zadovoljavaju rekurzivnu formulu*

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

s početnim vrijednostima $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x$.

Lema 6 *Derivacija Legendreovih polinoma može se rekurzivno izraziti pomoću samoih Legendreovih polinoma, formulom*

$$(1 - x^2)P_n'(x) + nxP_n(x) = nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Lema 7 *Težinski faktori u Gauss-legendreovim formulama mogu se eksplicitno izračunati formulama*

$$w_i = \frac{2(1 - x_i^2)}{n^2[P_{n-1}(x_i)]^2},$$

gdje su $x_i, i = 0, \ldots, n$ *nultočke Legendreovog polinoma* P_n.

Greška Gauss-Legendreove integracijske formule

Sljedeći teorem rezimira prethodne rezultate, i ujedno daje ocjenu greške za Gauss-Legendreovu integraciju.

Teorem 11 *Za funkciju* $f \in C^{2n}([-1, 1])$ *Gauss-Legendreova formula integracije glasi*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + E_n(f),$$

gdje su x_i nultočke Legendreovog polinoma P_n i koeficijenti w_i dani s

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{2(1-x_i^2)}{[nP_{n-1}(x_i)]^2} = \frac{2(1-x_i^2)}{[(n+1)P_{n+1}(x_i)]^2} \\ &= \frac{2}{nP_n'(x_i)P_{n-1}(x_i)} = -\frac{2}{(n+1)P_n'(x_i)P_{n+1}(x_i)} \\ &= \frac{2}{(1-x_i^2)[P_n'(x_i)]^2}. \end{aligned}$$

Za grešku $E_n(f)$ vrijedi da za $\xi \in (-1,1)$

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi).$$

□

Dokaz. Treba samo dokazati formulu za ocjenu greške. Kako je Gauss-Legendreova formula zapravo integral Hermiteovog interpolacijskog polinoma, treba integrirati grešku kod Hermiteove interpolacije, a po teoremu o greški interpolacije Hermiteovim polinomom glasi:
Greška kod interpolacije Hermiteovim polinomom $h_{2n+1}(x)$ funkcije $f \in C^{(2n+2)}([x_{\mathtt{min}}, x_{\mathtt{max}}])$ u $n+1$ čvorova $x_0, \ldots, x_n$ je oblika

$$e(x) := f(x) - h_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_n^2(x),$$

gdje su

$$x_{\mathtt{min}} := \min\{x_0, \ldots, x_n, x\} < \xi < \max\{x_0, \ldots, \} =: x_{\mathtt{max}},$$

a $\omega(x)$ je definirna

$$\omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k).$$

Integracijom i primjenom teorema srednje vrijednosti za integrale, dobijamo

$$E_n(f) = \int_{-1}^{1} e(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_{-1}^{1}\omega_n^2(x)dx,$$

za neki $\xi \in (-1,1)$. Kako je

$$\omega_n(x) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}P_n(x),$$

i zbog norme Legendreovog polinoma (lema 3), imamo

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \right]^2 \frac{2}{2n+1} = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi).$$

Primjer 15 *Za $n = 3$ iz prethodnog primjera izračunajmo težinske koeficijente w_i*

$P_3(x)' = (\frac{1}{2}(5x^3 - 3x))' = \frac{1}{2}(15x^2 - 3)$

$w_1 = \frac{2}{(1-x_1^2)[P_3'(x_1)]^2} = \frac{2}{(1-0^2)[P_3'(0)]^2} = \frac{2}{\frac{9}{4}} = \frac{8}{9}$

$w_2 = \frac{2}{(1-x_2^2)[P_3'(x_2)]^2} = \frac{2}{(1-(\sqrt{\frac{3}{5}})^2)[P_3'(\sqrt{\frac{3}{5}})]^2} = \frac{2}{\frac{2}{5} \cdot 9} = \frac{5}{9}$

$w_3 = \frac{2}{(1-x_2^2)[P_3'(x_3)]^2} = \frac{2}{(1-(-\sqrt{\frac{3}{5}})^2)[P_3'(-\sqrt{\frac{3}{5}})]^2} = \frac{2}{\frac{2}{5} \cdot 9} = \frac{5}{9}$

U tablici su navedene vrijednosti čvorova integracije i težina za nekoliko slučajeva.

Tablica 2: Gauss-Legendreova formula

n=2	
$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$w_1 = 1$
$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$w_2 = 1$
n=3	
$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	$w_1 = \frac{5}{9}$
$x_2 = 0$	$w_2 = \frac{8}{9}$
$x_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	$w_3 = \frac{5}{9}$
n=4	
$x_1 = -0.861136$	$w_1 = 0.347855$
$x_2 = -0.339981$	$w_2 = 0.652145$
$x_3 = 0.339981$	$w_3 = 0.652145$
$x_4 = 0.861136$	$w_4 = 0.347855$
n=5	
$x_1 = -0.90618$	$w_1 = 0.236927$
$x_2 = -0.538469$	$w_1 = 0.478629$
$x_3 = 0$	$w_2 = 0.568889$
$x_4 = 0.538469$	$w_3 = 0.478629$
$x_5 = 0.90618$	$w_4 = 0.236927$

Čvorovi Gaussove formule smješteni simetrično s obzirom na ishodište $x = 0$, a težinski koeficijenti u simetrično smještenim čvorovima su međusobno jednaki.

Primjer 16 *Za $n = 3$ greška Gauss-Legendreove metode*

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{2^{2\cdot 3+1}(3!)^4}{(2\cdot 3+1)[(2\cdot 3)!]^3} f^{(2\cdot 3)}(\xi) \\ &= \frac{2^7(3!)^4}{7[(6)!]^3} f^{(6)}(\xi) \\ &= 6.3875e^{-5} \cdot f^{(6)}(\xi). \end{aligned}$$

1.6 Usporedba metoda

Primjer 17 *Približno izračunajte vrijednost integrala*

$$\int_0^{0.8}(0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5)dx.$$

Rješenje: Prava vrijednost integrala I iznosi

$$\int_0^{0.8} f(x)dx = \int_0^{0.8}(0.2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5)dx = 1.640533.$$

Trapezna formula:
$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$,
$f(a) = f(0) = 0.2$, $f(b) = f(0.8) = 0.232$, pa je

$$I(f) = (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2} = (0.8-0)\frac{0.232+0.2}{2} = 0.1728.$$

Apsolutna greška iznosi

$$\Delta = |0.1728 - 1.640533| = |-1.467733| = 1.467733.$$

Simpsonova formula:
$f(a) = f(0) = 0.2$, $f(a+b/2) = f(0.4) = 2.456$, $f(b) = f(0.8) = 0.232$, pa je

$$I(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) = \frac{0.8}{6}(0.2 + 4\cdot 2.456 + 0.232) = 1.367466.$$

Apsolutna greška iznosi

$$\Delta = |1.367466 - 1.640533| = 0.273066.$$

Produljena trapezna formula sa 4 podintervala:
$h = \frac{0.8-0}{4} = 0.2$ pa imamo

k	x_k	f_k
0	0.0	0.2
1	0.2	1.288
2	0.4	2.456
3	0.6	3.464
4	0.8	0.232

pa je

$$I(f) = h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \frac{1}{2}f_4\right) = 1.4848.$$

Apsolutna greška je

$$\Delta = |1.4848 - 1.640533| = 0.155733.$$

Ocjenimo pogrešku, koristeći formule

$$|E_n^T(f)| \le \frac{(b-a)h^2}{12}M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2, \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|.$$

$$f''(x) = -400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3,$$

pa se maksimum postiže u točki $x = 0.266288$

$$M_2 = \max_{x=0.266288}|f''(x)| = 63.70433.$$

Uvrštavanjem u ocjenu dobivamo

$$|E_n^T(f)| \le \frac{(0.8-0)^3}{12\cdot 4^2}M_2 = 0.169878.$$

Pogledajmo koliko bi bilo potrebno podintervala kako bi se postigla zadana točnost $\varepsilon = 10^{-4} = 0.0001$.

$$n \ge \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}} = \sqrt{\frac{(0.8-0)^3\cdot 63.70433}{12\cdot 10^{-4}}} = 180.6007,$$

tako da n mora biti ≥ 181.

Produljena Simpsonova formula sa 4 podintervala:

$h = \frac{0.8-0}{4} = 0.2$ pa imamo

k	x_k	f_k
0	0.0	0.2
1	0.2	1.288
2	0.4	2.456
3	0.6	3.464
4	0.8	0.232

pa je

$$I(f) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) = 1.623415.$$

Apsolutna greška je

$$\Delta = |1.623415 - 1.640533| = 0.017118.$$

Pogledajmo koliko bi bilo potrebno podintervala kako bi se postigla zadana točnost $\varepsilon = 10^{-4} = 0.0001$. Iz ocjene za pogrešku produljene Simpsonove formule imamo:

$$n \ge \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}}, \quad M_4 = \max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|.$$

$f^{(4)}(x) = -21600 + 48000x$, pa je $M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)| = |f^{(4)}(0.8)| =$ 38400.

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}} = n \geq \sqrt[4]{\frac{(0.8-0)^5 M_4}{180 \cdot 0.0001}} = 28.915.$$

Dakle za $n \geq 29$ dobijemo traženu točnost, to je puno manje nego produljenom trapeznom formulom.

Gauss-Legendreova formula: Uzmimo $n = 3$. Po formuli slijedi

$$I(f) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3),$$

gdje su $w_{1,3} = \frac{5}{9}$, $w_2 = \frac{8}{9}$, te $x_{1,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$ i $x_2 = 0$. Kako su nama granice integracije 0 i 0.8, moramo pomaknuti granice na -1 i 1. Vrijedi

$$a_1 + a_2(1) = 0.8,$$

$$a_1 + a_2(-1) = 0.$$

Rješenje sustava je $a_{1,2} = 0.4$, pa je $x = 0.4 + 0.4x_d$ i $dx = 0.4dx_d$. Funkcija sada izgleda

$$\begin{aligned} f(x) &= \big(0.2 + 25(0.4+0.4x) - 200(0.4+0.4x)^2 + 675(0.4+0.4x)^3 \\ &- 900(0.4+0.4x)^4 + 400(0.4+0.4x)^5\big) \cdot 0.4. \end{aligned}$$

Za x_1, x_2 i x_3 dobivamo funkcijske vrijednosti

x_k	f_k
$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	0.50634232
0	0.9824
$\sqrt{\frac{3}{5}}$	0.87477768.

$$I(f) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) = \frac{5}{9} \cdot 0.50634232 + \frac{8}{9} \cdot 0.9824 + \frac{5}{9} \cdot 0.87477768 = 1.640533,$$

čime smo dobili egzaktno rješenje. Možemo provjeriti egzaktnost i preko ocjene za grešku Gauss-Legederove formule

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi).$$

Za $n = 3$, dobijemo egzaktno rješenje, tj $E_n(f) = 0$, jer je $f^{(6)}(x) = 0$.

Bibliografija

[DMSVS] Drmač Zlatko, Marušić Miljenko, Singer Sanja, Vjeran Hari, Rogina Mladen, Singer Saša, Numerička analiza, Sveučilište u Zagrebu, 2003.

[D] Douglas N. Arnold, A Concise Introduction To Numerical Analysis, School of Mathematics, Univrsity of Minnesota, Minneapolis, 2001.

[E] e-ucenje.fsb.hr, Matematika, Arhiva, Matematika 3 i 4, Numerička matematika: Numerička Integracija (vježbe)

[K] Krešić-Jurić Saša, Određeni integral, PMF Sveučilište u Splitu

[U] Ujević Nenad, Uvod u numeričku matematiku, PMF Sveučilište u Splitu, 2004.

[W] Wikipedia, the free encyclopedia, https://sh.wikipedia.org/wiki/Numericka-integracija

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

Numeričko integriranje

Marina Kubat

Sažetak:
Tema diplomskog rada je numeričko integriranje. U radu su izvedene Trapezna, Simpsonova i produljene formule. Također je obrađen Rombergov algoritam te Gaussove integracijske formule. Dana je ocjena greške koristeći teoriju Peanove jezgre. U primjerima je numerički izračunata približna vrijednost integrala, a također data prava vrijednost integrala, kako bi mogli pokazati kad je pojedina formula egzaktna za određenu funkciju.
Ključne riječi:
Trapezna formula, Simpsonova formula, Peanova jezgra, Romberov algoritam, Richardsonova ekstrapolacija, Gauss-Legendreova formula.
Podatci o radu:
55 stranica, 7 slika, 6 literaturnih navoda, napisano na hrvatskom jeziku
Mentor: *doc. dr. sc. Jurica Perić*
Članovi povjerenstva:
prof. dr. sc. Milica Klaričić Bakula
Marija Bliznac Trebješanin

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *28. svibnja 2018.*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS
Numerical integration

Marina Kubat

Abstract:
Subject of this master work is numerical integration. In order to introduce methods for numerical integration, we will briefly describe Trapezoidal rule, Simpson's rule and extendet formulas. It's also derived Romberg algorithm and Gauss integration formula. After extraction, the error of the formula are given using the Peano kernel theorem. In the examples, the approximate value of the integral is numerically calculated, and the true value if the integral is also given, in ordet to show when the particular formula is exact for a specific function.
Key words:
Trapezoidal rule, Simpson's rule, the Peano kernel theorem, Romberg algorithm, Richardson extrapolation, Gauss-Legendre formula.
Specifications:
55 pages, 7 images, 6 references, writen in Croatian)
Mentor: *doc. dr. sc. Jurica Perić*
Committee:
prof. dr. sc. Milica Klaričić Bakula
Marija Bliznac Trebješanin

This thesis was approved by a Thesis commettee on *28. svibnja 2018.*